11. prednáška (3.5.2021)

Hashovanie

alebo

ako rýchlo hľadať

alebo

Agregovaná zložitosť, HasSet, rolling Hash

Hľadanie prvku v poli

- Ako zistiť, či pole p obsahuje prvok hladanyPrvok?

```
public static boolean nachadzaSa(int[] p, int hladanyPrvok) {
   for (int i = 0; i<p.length; i++) {
      if(p[i] == hladanyPrvok)
         return true;
   }
   return false;
}

public static boolean nachadzaSa(String[] p, String hladanyPrvok) {
   for (int i = 0; i<p.length; i++) {
      if(p[i].equals(hladanyPrvok))
         return true;
   }
   return false;
}
```

Hľadanie prvku v poli

- Ako zistiť, či pole p obsahuje prvok hladanyPrvok?

```
public static boolean nachadzaSa(int[] p, int hladanyPrvok) {
    for (int i = 0; i<p.length; i++) {
        if(p[i] == hladanyPrvok)
            return true;
    }
    return false;
}
```

- Aká je časová zložitosť hľadania?
- *O(n)*

Hľadanie prvku v poli

- Ak máme veľa hľadaní ako viem hľadať rýchlejšie?
- 2. prednáška - Binárne vyhľadávanie
  1. Utriedime
     - *O(n log n)* QuickSort, MergeSort, HeapSort
     - *O(n^2)* BubbleSort, SelectionSort
  2. Každé binárne vyhľadávanie v čase *O(log n)*

Ušetrili sme čas, zarobili peniaze.

Ušetrili sme čas, zarobili peniaze.

ak nie sú otázky...

Ďakujem za pozornosť!

Hľadanie prvku v spájanom zozname

- Spájaný zoznam
  - hľadanie prvku v čase $O(n)$
- Výhody spájaného zoznamu oproti poľu?
  - dynamická štruktúra
- Počet operácií v najhoršom prípade (= keď máme smolu):
  - `get` - $O(n)$, `set` - $O(n)$
  - pridanie na začiatok a na koniec: $O(1)$
  - pridanie/odobranie (bez nájdenia pozície): $O(1)$

Pole s kapacitou

- **Pole s kapacitou** – pole, veľkosť (size)
- Výhody poľa s kapacitou
  - ak kapacita stačí, **`add (remove)`** na koniec zoznamu vieme realizovať v čase $O(1)$
    - zvýšenie premennej s veľkosťou (size) o 1
    - uloženie hodnoty na príslušný index interného poľa
  - ak kapacita nestačí, musíme vyrobiť nové pole a kopírovať, t.j. časová zložitosť je $O(n)$
- Ak je veľa neobsadených políčok, zmenšíme pole
- `get` – $O(1)$, `set` – $O(1)$
- hľadanie - $O(n)$

Pole s kapacitou

- **Pole s kapacitou** – pole, veľkosť (size)
- Problémy pri zväčšovaní a zmenšovaní poľa:
  1. Ak je pole naplnené (veľkosť == kapacita) a chceme pridať ďalší prvok na koniec zoznamu tak kapacita nestačí, musíme vyrobiť nové pole a kopírovať obsah starého poľa, t.j. časová zložitosť je $O(n)$
  2. Ak má pole veľa neobsadených políčok tak vyrobíme nové menšie pole a obsah starého poľa prekopírujeme, t.j. časová zložitosť je $O(n)$
- Kedy a ako budeme pole zväčšovať a zmenšovať?
  - Ak je pole naplnené, tak jeho kapacitu zväčšíme na dvojnásobnú
  - Ak je pole obsadene na ¼, tak jeho kapacitu zmenšíme na polovicu

Pole s kapacitou

- **Pole s kapacitou** – pole, veľkosť (size)
- Máme stále to isté pole s kapacitou a vieme ako funguje. Aká je zložitosť pridávania a odstraňovania prvkov podľa dokumentácie napríklad v implementácii ArrayList?

The `size`, `isEmpty`, `get`, `set`, `iterator`, and `listIterator` operations run in constant time. The `add` operation runs in *amortized constant time*, that is, adding n elements requires O(n) time. All of the other operations run in linear time (roughly speaking). The constant factor is low compared to that for the `LinkedList` implementation.

Prečo dokumentácia uvádza, že zložitosť je konštantná, teda O(1)?

Dokumentácia uvádza amortizovanú zložitosť

Amortizovaná zložitosť

- Kúpili sme si auto ktorého cena je 4000 eur
- Na jeho ročnú prevádzku minieme 1000eur
- Za auto budeme platiť 4 splátky v nasledujúcich 4 rokoch
- Koľko nás stojí ročná prevádzka auta?
- (4000+4*1000)/4=2000

PAZ

Amortizovaná zložitosť

- Pridať n prvkov do prázdneho poľa s kapacitou, kde začiatočná kapacita je 1, trvá *O(n)*.
- Dôkaz:
  - Predpokladajme, že máme dve operácie vieme iba vložiť prvok ak je kapacita dostatočná a vieme zväčšiť pole (zdvojnásobiť)
  - Jedno vkladanie trvá čas O(1), vkladaní vykonáme práve n, všetky vkladania trvajú spolu O(n)
  - Ku zväčšovaniu dochádza práve vtedy, keď je aktuálny počet prvkov mocnina dvojky: $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^k$, kde k je najväčšia mocnina dvojky taká, že $2^k < n$
  - Tieto zväčšovania trvajú čas $O(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k)$ v zátvorke je geometrický rad, ktorého súčet je $2^{k+1} - 1 < 2n$
  - Výsledná zložitosť je O(n) + O(2n) = *O(n)*

čas kopírovania

$2^k < n$
$2^{k+1} < 2n$

Amortizovaná zložitosť

- Pridať n prvkov do prázdneho poľa s kapacitou, kde začiatočná kapacita je 1, trvá O(n)
- Podobne vieme ukázať, že ak vykonáme *n* odobraní prvkov z poľa, časová zložitosť bude opäť $O(n)$

V priemernom čase trvá jedna operácia čas $O(1)$

- Pri amortizovanej zložitosti nás nezaujíma časová zložitosť vykonania operácie raz ale priemerná časová zložitosť operácie pri opakovanom vykonávaní

Amortizovaná zložitosť

- Vieme ukázať, že vykonanie ľubovoľných n operácii v poli s kapacitou bude trvať $O(n)$

Postupnosť operácii rozdelíme na bloky, kde každý blok končí zmenou kapacity.
Viac na cvičeniach

- Pomôže nám amortizovaná zložitosť pri riešení dnešného problému ako rýchlo vyhľadávať?

Pole s kapacitou

- **Pole s kapacitou**
- `get` - $O(1)$, `set` - $O(1)$,
  `add`, `remove` - $O(1)$ „občas" $O(n)$, amort. $O(1)$,
- hľadanie - $O(n)$
- Ako viem hľadať rýchlejšie?
- Držať utriedené pole
  - Binárne vyhľadávanie $O(\log n)$
  - Môžeme používať indexy? Zmenia sa zložitosti?
  - `Aby sme udržali pole vždy utriedene:`
    `set` - $O(n)$, `add` - $O(n)$, `remove` - $O(n)$

Po každej operácii musíme znovu usporiadať

Pole s „veštcom“

- Majme pole a „veštca“
- Veštec vie o každom prvku povedať na aký index vo zvolenom poli patrí

Mám pole veľkosti 7

Kde do poľa patrí:

Patrí na miesto:

Damian → 5

prvok

index

Programujeme veštca

- Veštca nahradíme funkciou z množiny slov na indexy v poli
- Funkcia nám vypočíta hash pre daný reťazec, preto ju budeme nazývať hash-ovacou funkciou

Mám pole veľkosti 7

Kde do poľa patrí:

Patrí na miesto:

Damian → funkcia → 5

prvok

hashovacia funkcia

index, hash

Wbn.sk

Hash-ovacia funkcia

```
public static int zaHashujRetazec1(String s, int velkost) {
    int sucet = 0;
    for (int i = 0; i < s.length(); i++) {
        sucet += (int)(s.charAt(i));
    }
    int hash = sucet % velkost;
    return hash;
}
```

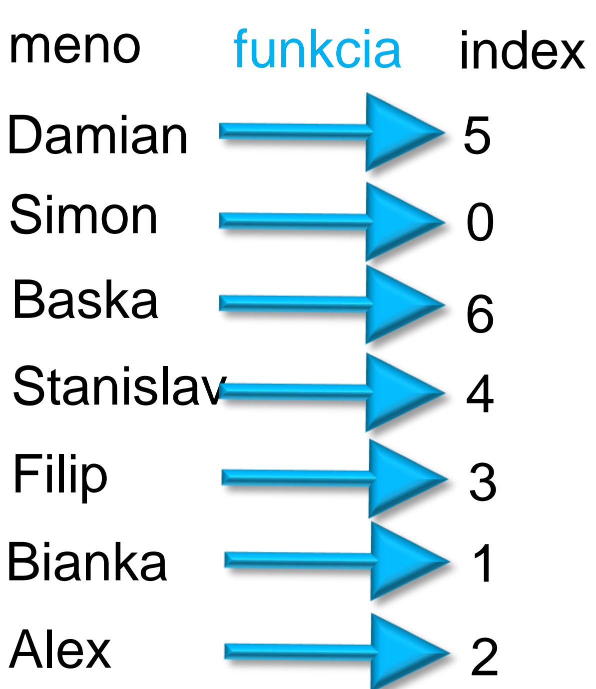
- Sčítame unicode hodnoty znakov z reťazca `s` a vypočítame zvyšok súčtu po delení `velkost`-ou

- *Hash-ovacou funkcou (hash function)* nazveme každú funkciu, ktorá priradzuje dátam ľubovoľnej veľkosti hodnotu z konečnej množiny

Ukladáme na základe Hash-u

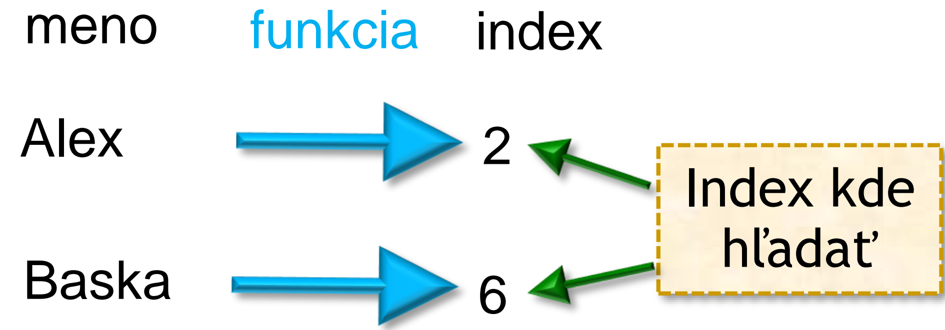
- Do 7 prvkového poľa chceme uložiť mená:
  Damian, Simon, Baska, Stanislav, Filip, Bianka, Alex

0	Simon
1	Bianka
2	Alex
3	Filip
4	Stanislav
5	Damian
6	Baska



Ukladáme na základe Hash-u

- Majme čiastočne naplnené pole
- Nachádza sa v poli Alex?
- Nachádza sa v poli Baska?

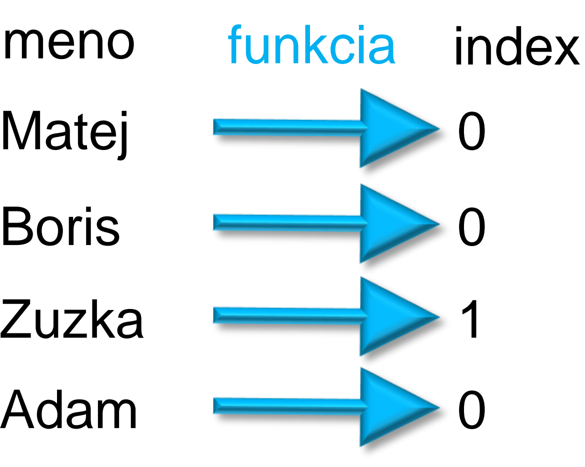


Hľadanie v konštantnom čase

Ukladáme na základe Hash-u

- Chceme pridať ďalších ľudí Matej, Boris, Zuzka, Adam

0	Simon
1	Bianka
2	Alex
3	Filip
4	Stanislav
5	Damian
6	Baska



Ako uložiť viac hodnôt?

- Pole spájaných zoznamov

0 → Simon → Matej → Boris → Adam →
1 → Bianka → Zuzka →
2 → Alex →
3 → Filip →
4 → Stanislav →
5 → Damian →
6 → Baska →

meno	funkcia	index
Matej	→	0
Boris	→	0
Zuzka	→	1
Adam	→	0

Počet operácií pri hľadaní v najhoršom prípade: $O(n)$

Ak viacerým prvkom je priradený ten istý index nastala: kolízia

Kolizie

- Kolízia nastáva ak dve objekty chceme priradiť na to isté miesto
- Vieme to riešiť napr. pomocou spájaného zoznamu alebo iných štruktúr
- Ako ovplyvnia kolízie zložitosť?

V najhoršom prípade je zložitosť $O(n)$

Ako riešiť kolízie?

- Vyhýbať sa kolíziám
  - Mať dostatočnú kapacitu aby v ideálnom prípade mohol byť každý prvok sám
- Realita: Pole nenapĺňame na viac ¾ kapacity (defaultna hodnota pre HashMap a HashSet)
- Pomer medzi aktuálnym počtom prvkov a kapacitou sa nazýva *faktor naplnenia* alebo *hustota* alebo *Load Factor*

Nahliadnime do dokumentácie

Load faktor

- Load faktor ovplyvňuje množstvo nevyužitej pamäte
- Malý load faktor – veľa nevyužitej pamäte
- Veľký load faktor – väčšia zložitosť

Ako riešiť kolízie?

- Vyhýbať sa kolíziám
  - Mať dostatočnú kapacitu aby v ideálnom prípade mohol byť každý prvok sám
- Aj keď máme dostatočne malý faktor naplnenia môže nastať veľa kolízii

0
1
2
3
4
5
6

Simon
Matej
Boris
Adam

Zmena hash-ovacej funkcie

Zmena hash-ovacej funkcie

- Doteraz:
  1. Pre objekt sme vypočítali hodnotu x (suma kódov znakov)
  2. Vypočítali sme *x % m*, kde *m* je maximálna kapacita poľa (modulo označujeme *%* alebo *mod*)
- Lineárna kongruencia
  1. Rovnako spočítame x
  2. Zoberieme konštantu *a*, následne vypočítame *ax % m*

Vďaka rôznej voľbe *a* vieme dosať „rodinu“ hash funkcii

Vyskúšajte pre *a* = 2, *m* párne

- Ďalšie dobré funckie dostaneme ak *m* je prvočíslo a konštanta *a* je blízka 0,618034 *m*, kde 1,618034 je zlatý rez

Zmena hash-ovacej funkcie

- Zmena orezávania mocou zvýšku – vyššie bity súčtu
  $\lfloor (ax \,\%\, 2^w)/2^{w-l} \rfloor$ pre $m=2^l$

  Vyskúšajte pre m=8 a w=5

- Skalárny súčin
  $(\sum_i a_i x_i) mod\ n$, v našom prípade sú x_i jednotlivé písmená, vo všeobecnosti to môžu byť rôzne prvky postupnosti poľa alebo inej štruktúry
- Polynóm
  Skalárny súčin vieme podobne nahradiť polynómom: $(\sum_i a^i x_i) mod\ n$

Hash function

- Aké vlastnosti by mala spĺňať hash-ovacia funkcia
  - Minimalizovať kolízie (viac na pravdepodobnostných a aproximačných algoritmoch)
  - Rovnomerná distribúcia (viac na pravdepodobnosti a štatistike a pravdepodobnostných a aproximačných algoritmoch)
  - Ľahko vypočítateľná

Ako riešiť kolízie?

- Pôvodne

0
1
2
3
4
5
6

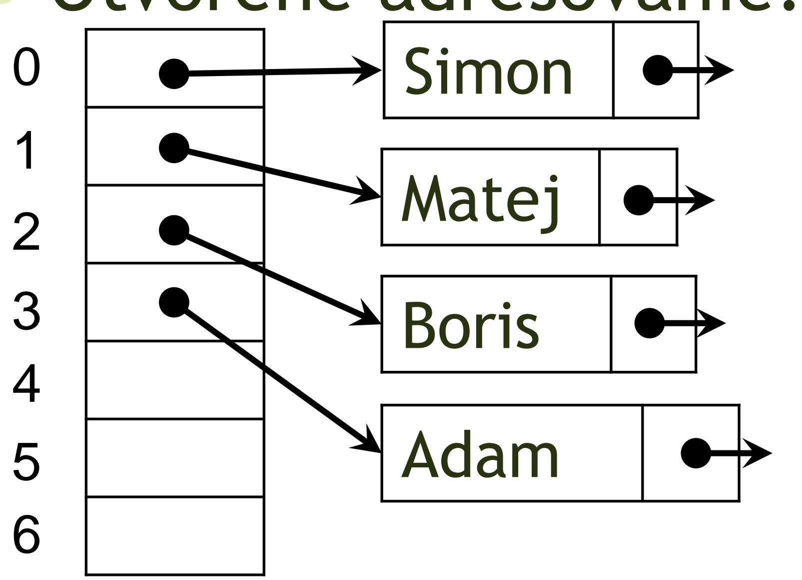
Simon → Matej → Boris → Adam →

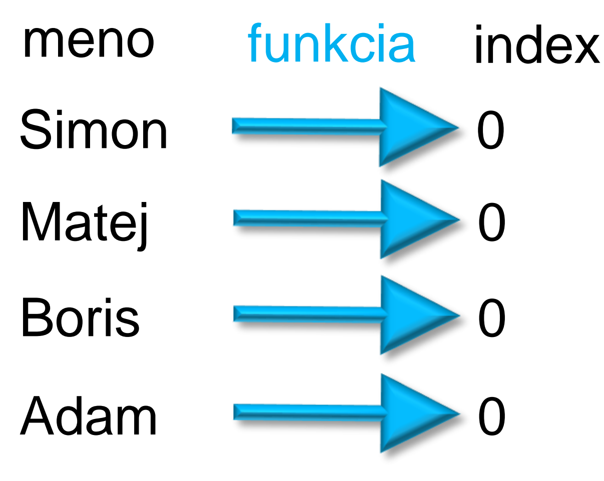
meno	funkcia	index
Simon	→	0
Matej	→	0
Boris	→	0
Adam	→	0

- Zachováme hash-ovaciu funkciu ale dovolíme otvorené adresovanie

Ako riešiť kolízie?

- Otvorené adresovanie:





- Prvok sa zapíše na prvú nasledujúcu voľnu pozíciu
- Ako bude prebiehať čítanie? Čo ak chcem prvok vymazať?

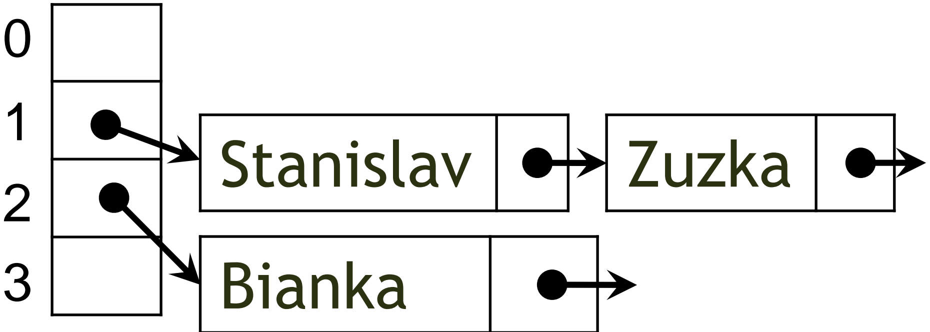
Počet operácií pri hľaďaní v najhoršom prípade: $O(n)$

Pridávanie a vyhadzovanie

- Prepodkladajme, že kolízie riešime ukladaním do spájaného zoznamu
- Do nášho HashSet-u vieme pridávať prvky a vyhadzovať z neho prvky
- Ako udržať Load Factor medzi 0,25 a 0,75?

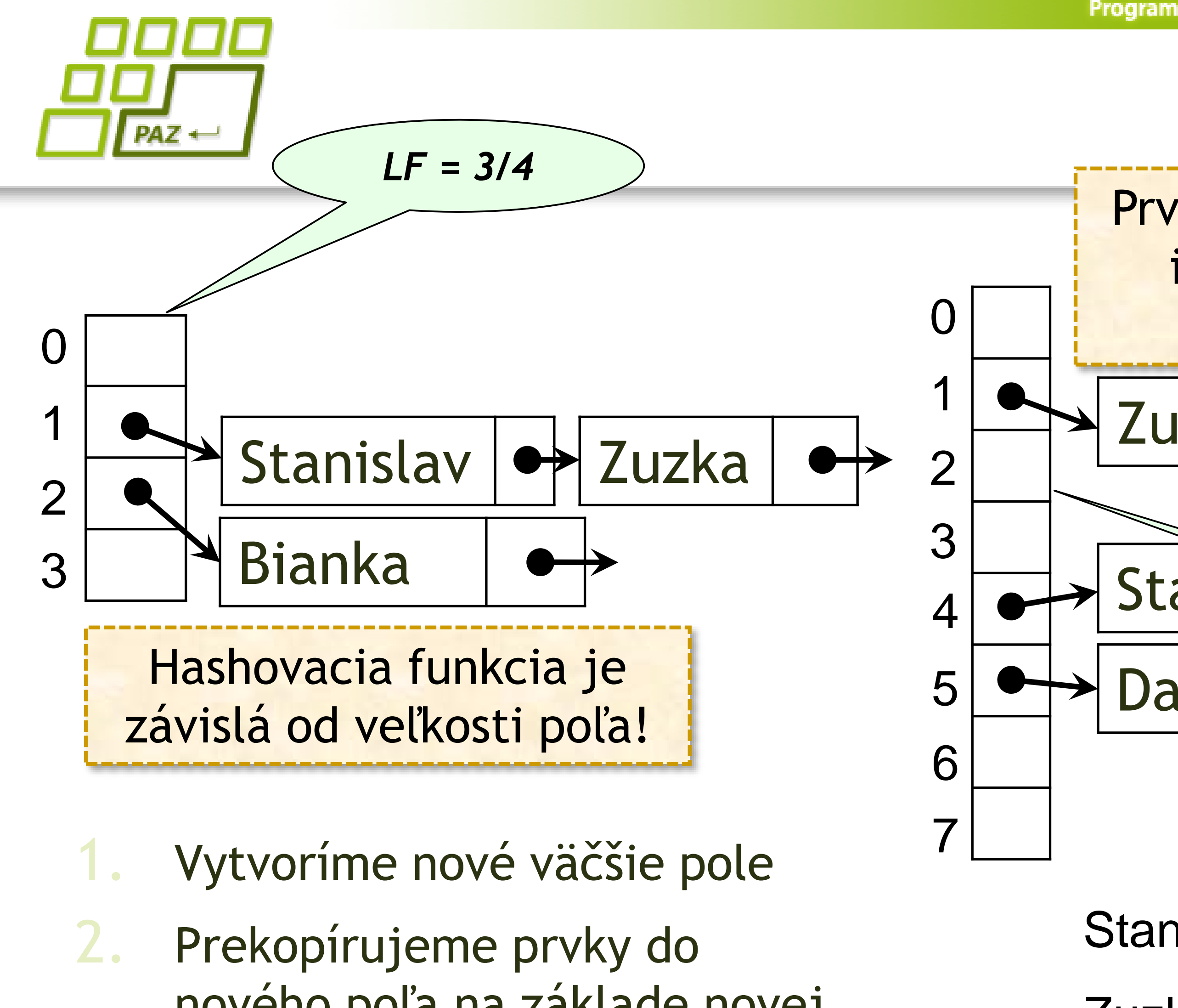
Rehasing

- Chceme udržať Load Factor medzi 0,25 a 0,75?
- Majme 3 prvky uložené v poli veľkosti 4



- Aktualne je Load Factor ¾
- Chceme pridať prvok Damian
  ak by sme ho pridali tak Load Factor bude 1
- Riešenie ako pri poli s kapacitou
  - Vytvoríme nové väčšie pole a prvky „skopírujeme“

Rehasing



Prvky sa môžu dostať na iné indexy lebo sa zmenila hashovacia funkcia

0
1
2
3
4
5
6
7

Zuzka
Bianka
Stanislav
Damian
LF = 1/2

nová funkcia

Stanislav → 4
Zuzka → 1
Bianka → 1

Damian → 5

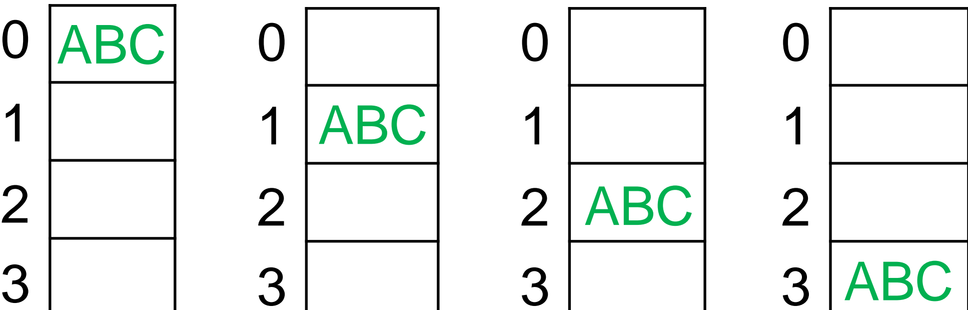
1. Vytvoríme nové väčšie pole
2. Prekopírujeme prvky do nového poľa na základe <u>novej</u> hash funkcie (pre**hash**ujeme)
3. Pridáme novy prvok

Rehashing

- Postup pri odstraňovaní je podobný
- Ak by Load Factor mal klesnúť pod hodnotu 0,25 (nami zvolená hodnota), tak vytvoríme menšie pole a prehashujeme
- LF = 0,25 ak bude nové pole polovičnej veľkosti tak novy LF = 0,5

Zložitosť hľadania

- Kolízie riešime pomocou spájaného zoznamu
- Aká bude amortizovaná zložitosť hľadania?
- Príklad pre LF=0,75 a uložené prvky A, B, C

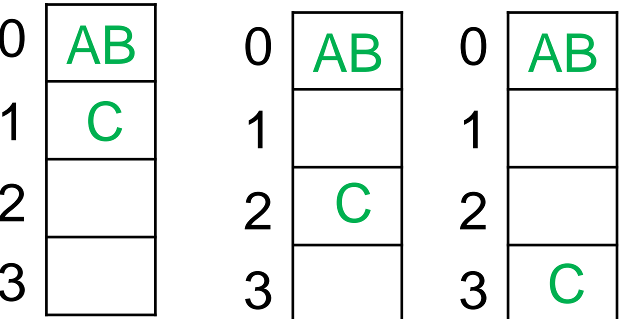


Máme 4 možnosti ako umiestniť všetky prvky do jednej priehradky

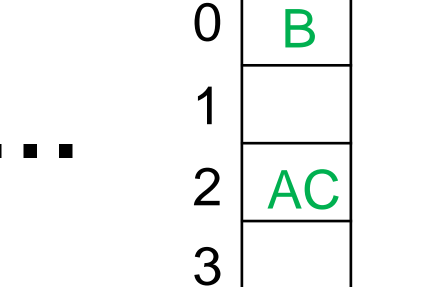
Všetky prvky patria do rovnakej priehradky
Najhoršia možnosť

Zložitosť hľadania

- Príklad pre LF=0,75 a uložené prvky A, B, C



...



...

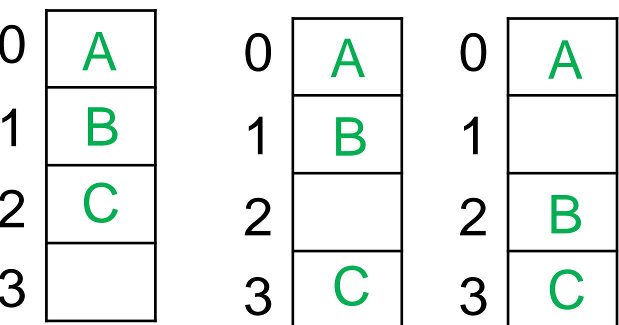
Dve prvky patria do rovnakej priehradky, jeden prvok je v inej

Dokopy 36 možností

Viac na diskrétnej matematike v 2. ročníku

Zložitosť hľadania

- Príklad pre LF=0,75 a uložené prvky A, B, C



...

0 B
1
2 C
3 A

...

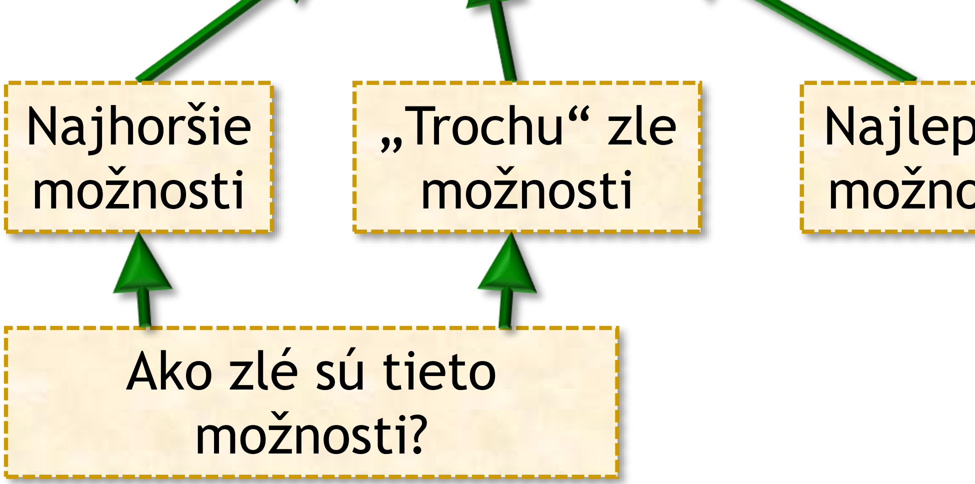
Každý prvok patrí do inej priehradky
Najlepší prípad, lebo nemáme kolízie

Dokopy 24 možností

Viac na diskrétnej matematike v 2. ročníku

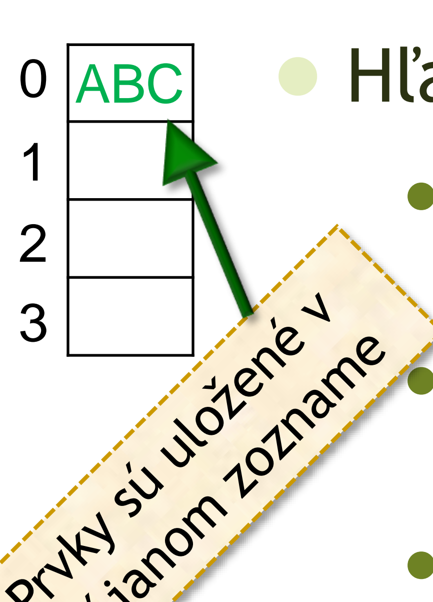
Zložitosť hľadania

- Príklad pre LF=0,75 a uložené prvky A, B, C
- Dokopy 4 + 36 + 24 = 4^3 = 64 možností



Zložitosť hľadania

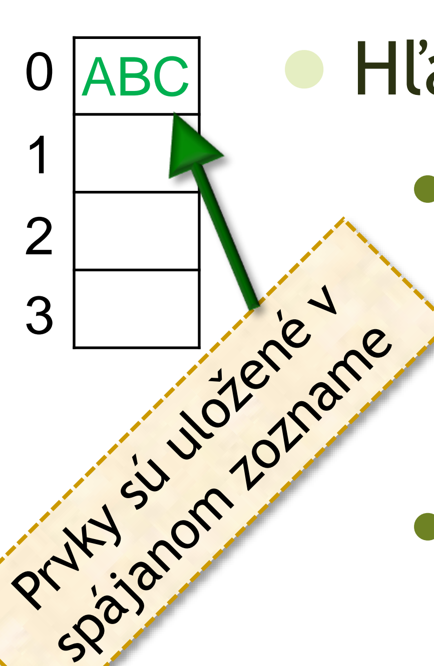
- Príklad pre LF=0,75 a uložené prvky A, B, C
- Aká je zložitosť hľadanie v najhoršom prípade?



- Hľadajme jeden z prvkov A, B, C
  - Pri hľadaní A prechádzam cez 1 prvok (priamo A)
  - Pri hľadaní B prechádzam cez 2 prvky (A a B)
  - Pri hľadaní C prechádzam cez 3 prvky (A, B a C)
  - V prieme prechádzam cez 2 prvky

Zložitosť hľadania

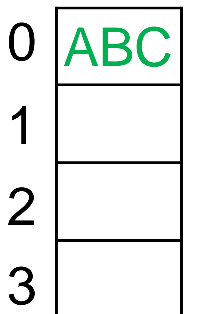
- Príklad pre LF=0,75 a uložené prvky A, B, C
- Aká je zložitosť hľadanie v najhoršom prípade?



- Hľadajme prvok D
  - Ak je hash prvku D rovnaký ako A, B, C, tak prechádzame pokiaľ neprídeme na koniec spájaného zoznamu A, B, C, **`null`** pozreli sme sa 4 krát
  - Ak je hash rôzny od hashu prvkov A, B, C, tak vieme odpovedať po pohľade do jednej priehradky, kde je zapísané **`null`**
  - Priemer (4+1+1+1)/4 = 1,75

Zložitosť hľadania

- Videli sme zložitosť hľadania ak sa hľadaný prvok nachádza (2) a nenachádza v poli (1,75)
- Ďalej uvažujeme len s prípadom, že hľadaný prvok sa nachádza v poli



4 možnosti
priemerný
čas hľadania
2

0	AB
1	
2	C
3	

36 možnosti
priemerný
čas hľadania
4/3

0	A
1	B
2	C
3	

24 možnosti
priemerný
čas hľadania
1

Zložitosť hľadania

- Príklad pre LF=0,75 a uložené prvky A, B, C
- Priemerná zložitosť hľadania:
- $$\frac{\check{C}as\ v\check{s}etk\acute{y}ch\ hľadan\acute{i}}{Po\check{c}et\ mo\check{z}nost\acute{i}} = \frac{4.2+36.\frac{4}{3}+24.1}{4+36+24} = \frac{80}{64} = 1{,}25$$
- Vo všeobecnosti počítame pre nejaký Load Factor a počet uložených hodnôt *n*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V\check{s}etk\acute{y}ch\ hľadan\acute{i}}{Po\check{c}et\ mo\check{z}nost\acute{i}}$$

- Limita je rovná konštante, teda priemerná zložitosť hľadania je konštantná $O(1)$

Zložitosť pridávania

- Podobne vieme ukázať zložitosť pridávania a odoberania prvkov z HashSet-u, navyše využijeme podobné myšlienky ako pri poli s kapacitou
- Agregovaná zložitosť pridávania a odoberania prvkov je $O(1)$

HashMap

- Namiesto prvku a nasledovníka si pamätajme aj ďalšie informácie

		Kľúč	Hodnota	
0	● →	Filip	dátum narodenia, bydlisko, 0908 654 321	● →
1	● →	Zuzka	dátum narodenia, bydlisko, 0911 123 456	● →
2				
3				

Dáta z ktorých počítame hash a index sa nazýva kľúč (key)

Informácie uložené ku kľúču sa nazývajú hodnota (value)

Kľúče sa nemôžu zhodovať!

HashSet a HashMap realita

- Na implementáciu HashSet-u sa bežne používa HashMap, kde sú všetky hodnoty (value) prázdne
- Čo o tom vraví dokumentácia?

HashSet sumár

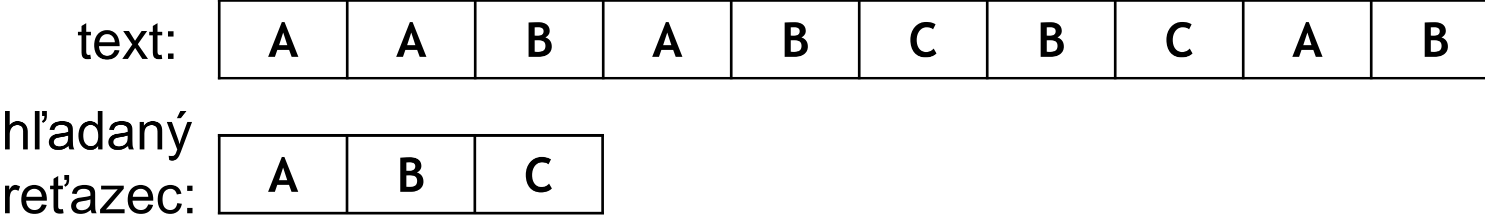
- Čo sme spomenuli:
  - Štruktúru HashSet-u
  - Ako hash-ovať (rôzne prístupy)
  - Problémy pri hash-ovani
  - Priemernú zložitosť hľadania
  - Agregovanú zložitosť pridávania a odoberania

Hľadanie v textoch

- Obsahuje nasledujúci text slovo „*null*“?
- *Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.*

Hľadanie v textoch

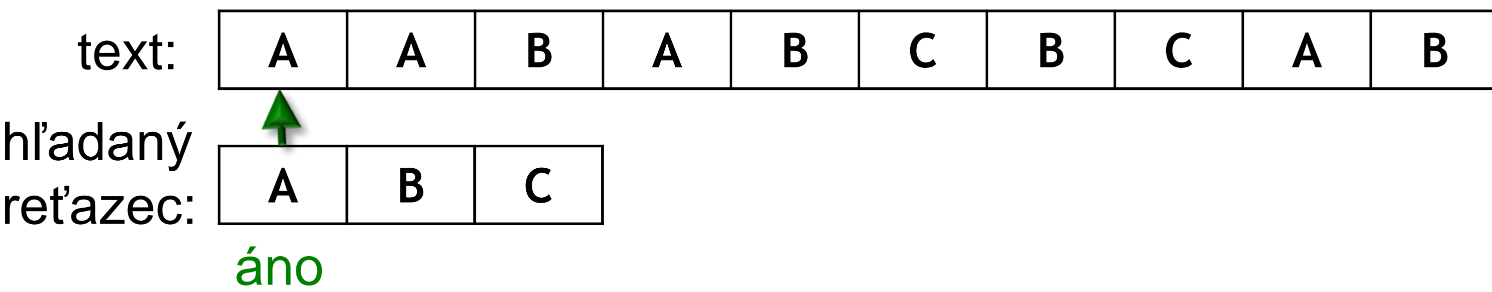
- Jednoduché hľadanie v texte



- Postupne „prikladám“ hľadaný reťazec ku textu a zisťujem, či nenastala zhoda

Hľadanie v textoch

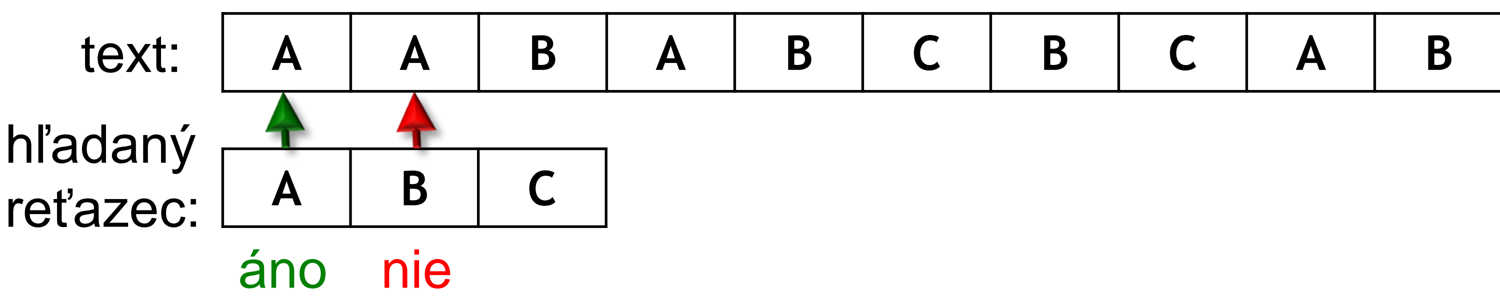
- Jednoduché hľadanie v texte



- Postupne „prikladám“ hľadaný reťazec ku textu a zisťujem, či nastala zhoda

Hľadanie v textoch

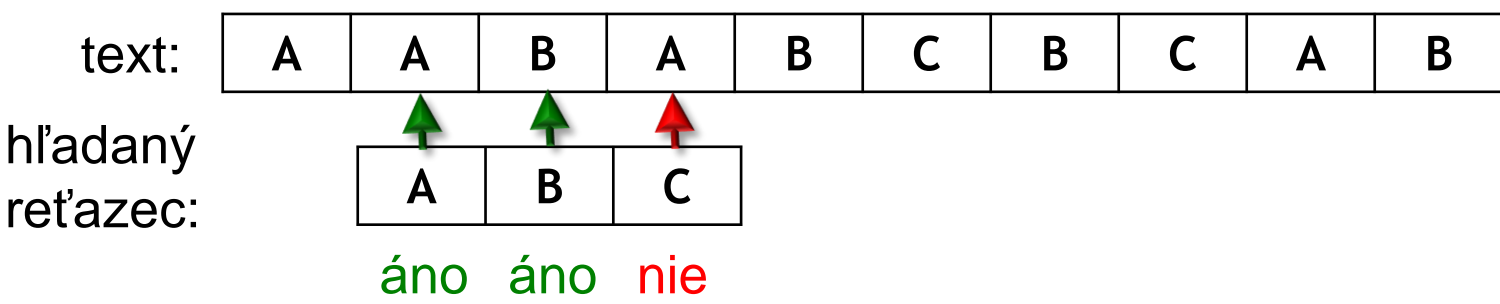
- Jednoduché hľadanie v texte



- Postupne „prikladám“ hľadaný reťazec ku textu a zisťujem, či nastala zhoda
- Ak zhoda nenastala, tak posuniem hľadaný reťazec o jeden znak ďalej a skúšam znova

Hľadanie v textoch

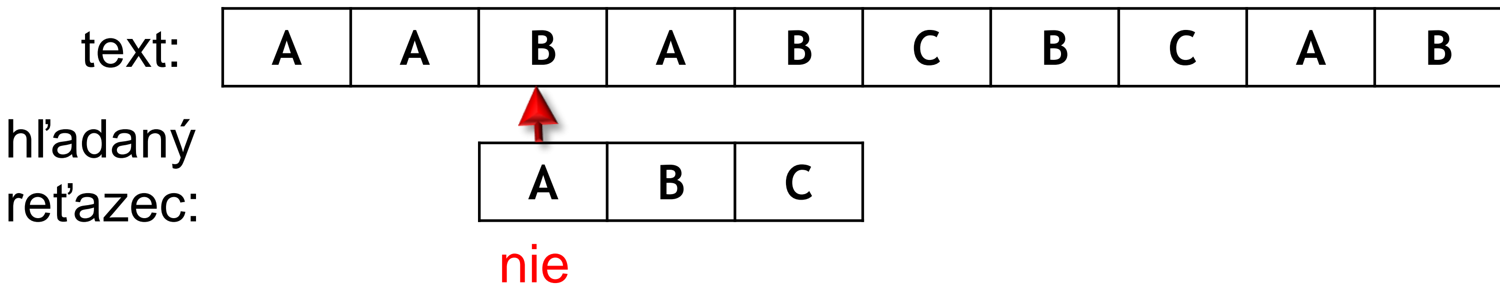
- Jednoduché hľadanie v texte



- Postupne „prikladám“ hľadaný reťazec ku textu a zisťujem, či nastala zhoda
- Ak zhoda nenastala, tak posuniem hľadaný reťazec o jeden znak ďalej a skúšam znova

Hľadanie v textoch

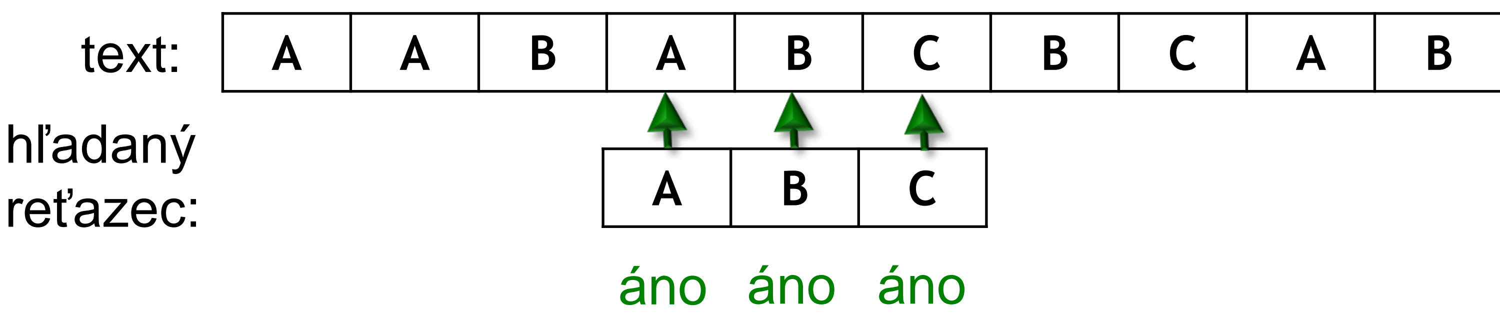
- Jednoduché hľadanie v texte



- Postupne „prikladám“ hľadaný reťazec ku textu a zisťujem, či nastala zhoda
- Ak zhoda nenastala, tak posuniem hľadaný reťazec o jeden znak ďalej a skúšam znova

Hľadanie v textoch

- Jednoduché hľadanie v texte

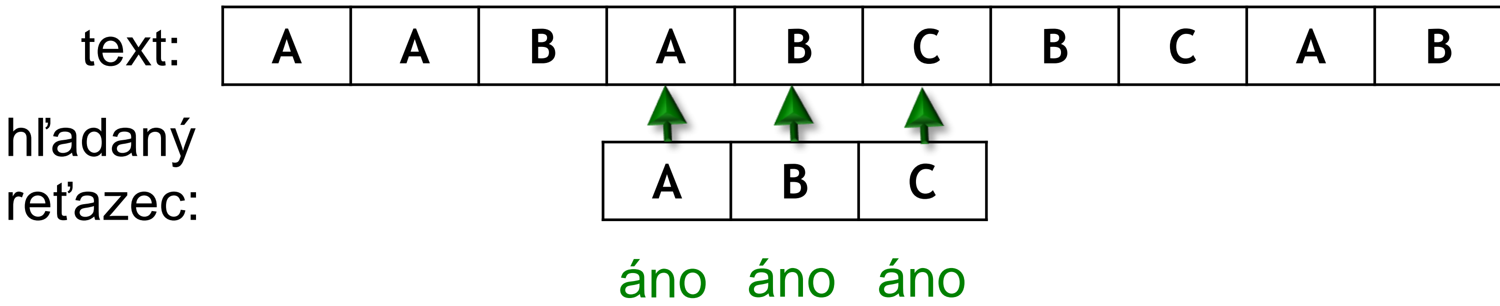


áno áno áno

- Postupne „prikladám“ hľadaný reťazec ku textu a zisťujem, či nastala zhoda
- Ak zhoda nenastala, tak posuniem hľadaný reťazec o jeden znak ďalej a skúšam znova
- Ak nastala zhoda vo všetkých znakoch našli sme hľadaný reťazec, vrátime pozíciu jeho začiatku

Hľadanie v textoch

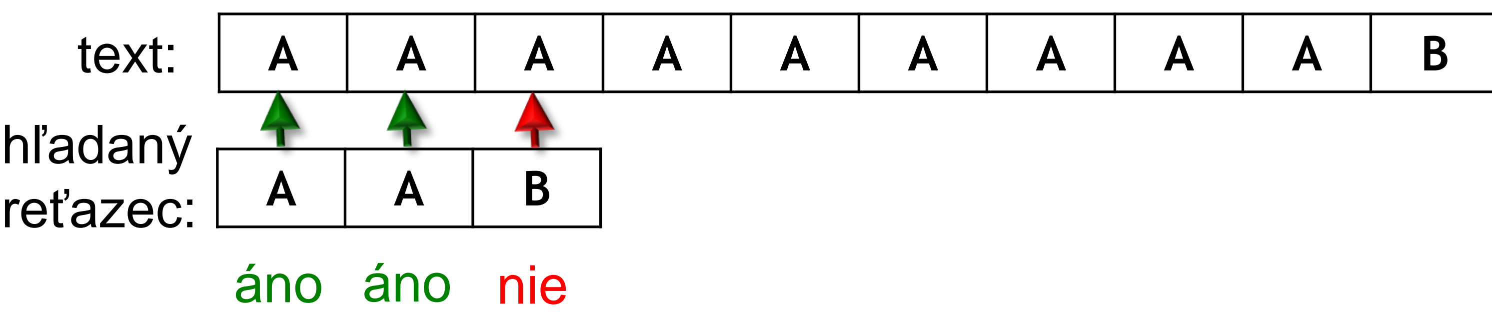
- Jednoduché hľadanie v texte



- Aká je zložitosť tohto algoritmu? Uvažujme, že dĺžka textu je *n* a dĺžka hľadaného reťazca je *m*
- $O(n.m)$

Hľadanie v textoch

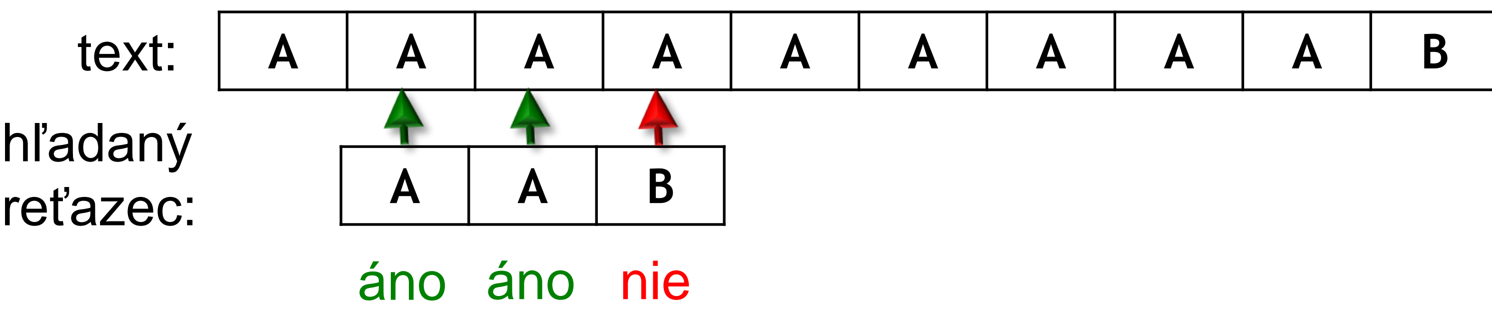
- Jednoduché hľadanie v texte



- Najhorší prípad
- O nerovnosti viem rozhodnúť až pri poslednom porovnávaní

Hľadanie v textoch

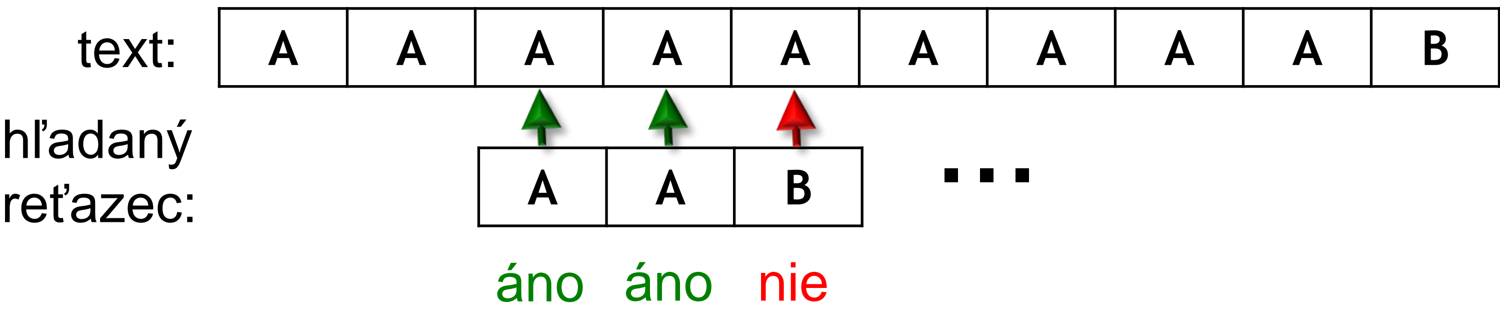
- Jednoduché hľadanie v texte



- Najhorší prípad
- O nerovnosti viem rozhodnúť až pri poslednom porovnávaní

Hľadanie v textoch

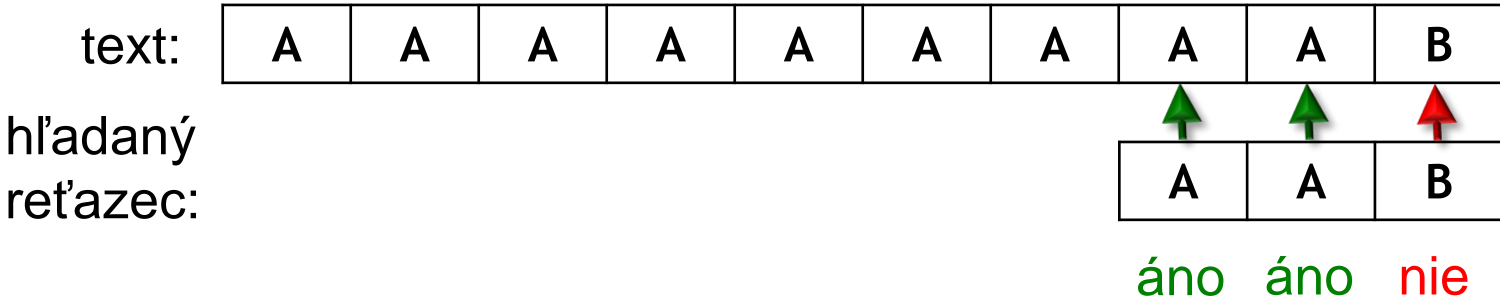
- Jednoduché hľadanie v texte



- Najhorší prípad
- O nerovnosti viem rozhodnúť až pri poslednom porovnávaní

Hľadanie v textoch

- Jednoduché hľadanie v texte



- Najhorší prípad
- O nerovnosti viem rozhodnúť až pri poslednom porovnávaní

Využitie hash-u

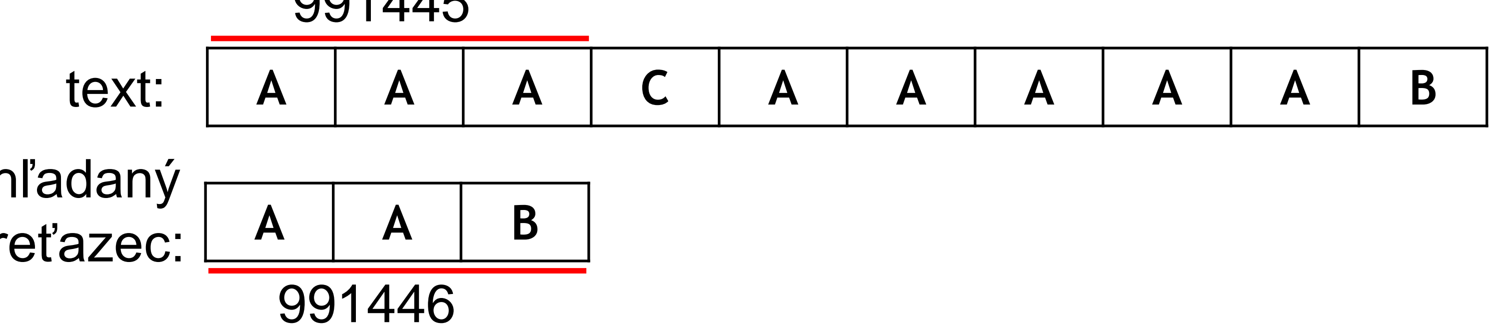
- Majme text zložený iba z malých a veľkých znakov anglickej abecedy
- Ich unicode hodnoty sú medzi 65 – 'A' až 122 – 'z'
- Hash reťazca získame ako polynóm

$$\left(\sum_i a^i x_i\right) mod\ n$$

- Kde x_i je hodnota znaku na pozícii i
- Za *a* zvolíme číslo 123 (väčšie ako hodnota najväčšieho znaku)
- z reťazca „AAB“ dostaneme hodnotu (**znaky od konca**) $123^0*66 + 123^1*65 + 123^2*65 = 991446$

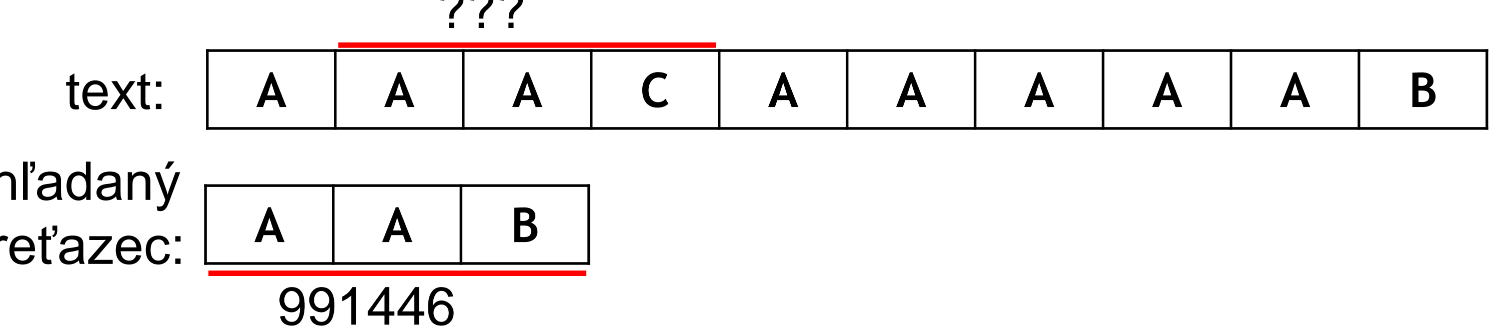
Využitie hash-u

- AAB zodpovedá 991446
- Ako ho využiť pri hľadaní v texte?



- AAA zodpovedá $1*65 + 123*65 + 123^2*65 = 991445$
- Namiesto postupného porovnávania znakov porovnávame hash-e

- AAB zodpovedá 991446
- Ako ho využiť pri hľadaní v texte?



- AAA zodpovedá 1*65 + 123*65 + 123^2*65 = 991445
- Ako z hash-u pre AAA získať hash pre AAC?

- Ako z hashu pre AAA získať hash pre AAC?
- $991445 - 123^2*65 = 8060$

Z hashu pre AAA odstránim prvý znak získam hash pre _AA

- Posuniem znaky a jednoducho vypočítam hash posunu
- $8060*123 = 991380 = (65+123*65)*123 = 65*123 + 123^2 * 65$

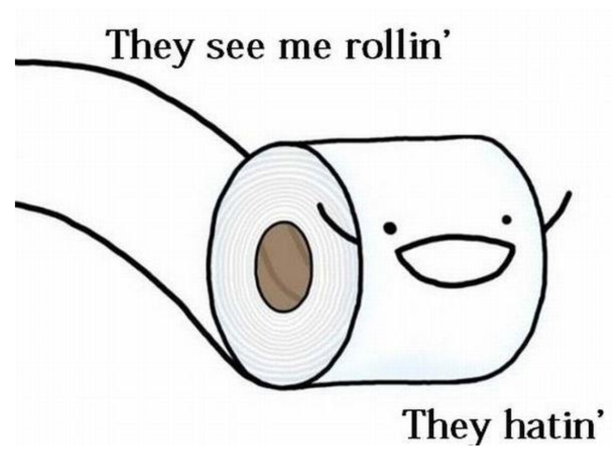
Posun z _AA na AA _ a počítam hash

- Pripočítame hodnotu pridávaného znaku
- $991380 + 67 = 991447$

z AA _ dosnateme AAC

Rolling Hash

- Cely hash nepočítame znova, ale počítame ho na základe starého hash-u a zmien
- Dostaneme tzv. Rolling Hash, prevaľuje sa cez objekt a podľa toho sa mení



Viac na cvičeniach

ak nie sú otázky...

Ďakujem za pozornosť!