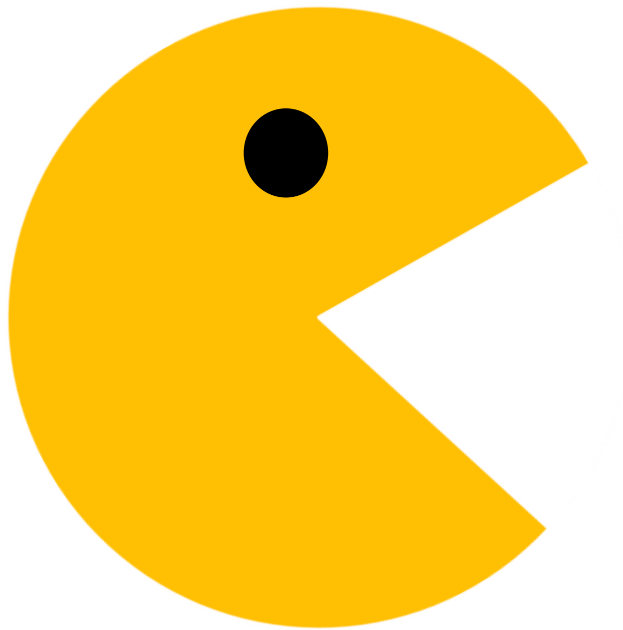
10. prednáška (26.4.2021)

Greedy algoritmy



Obsah

- GREEDY

- chamtivý
- nenásytný
- pažravý

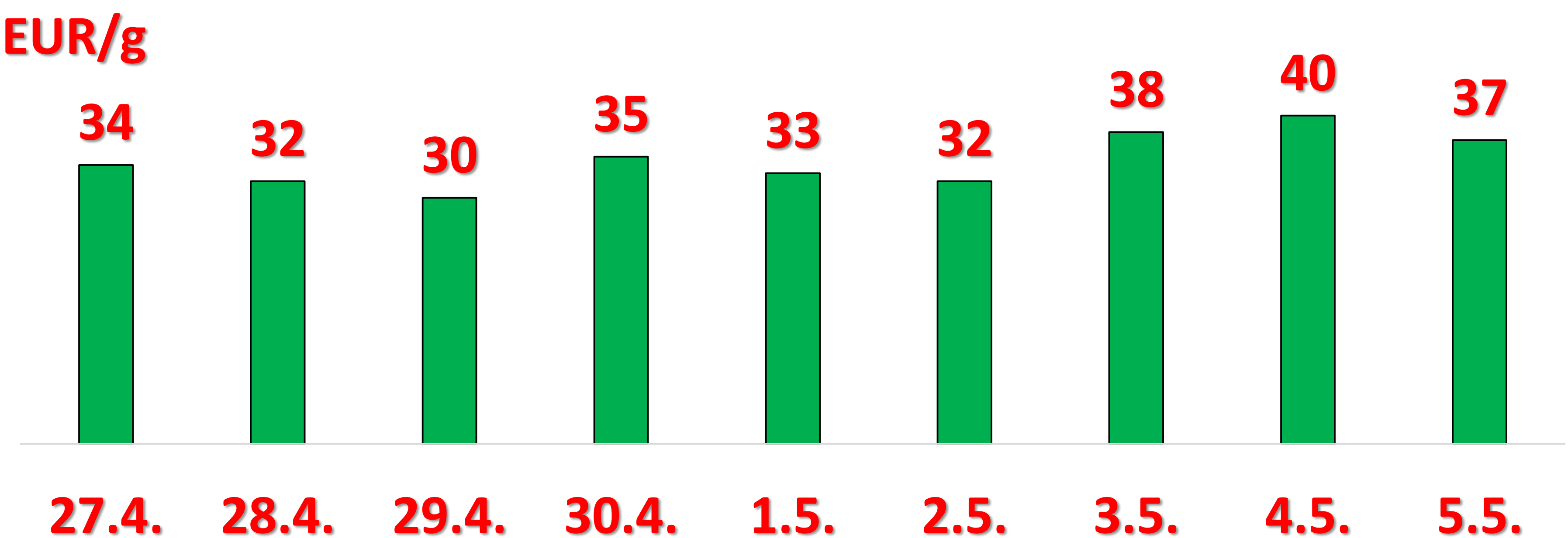
Obsah

- Greedy stratégia, greedy algoritmus
- Minimálna kostra grafu
- Úloha o zastávkach autobusu
- Jednoduchý rozvrhový problém
- Problém výberu úloh
- Problém plnenia batoha
- ...

Motivácia

Príklad 1.

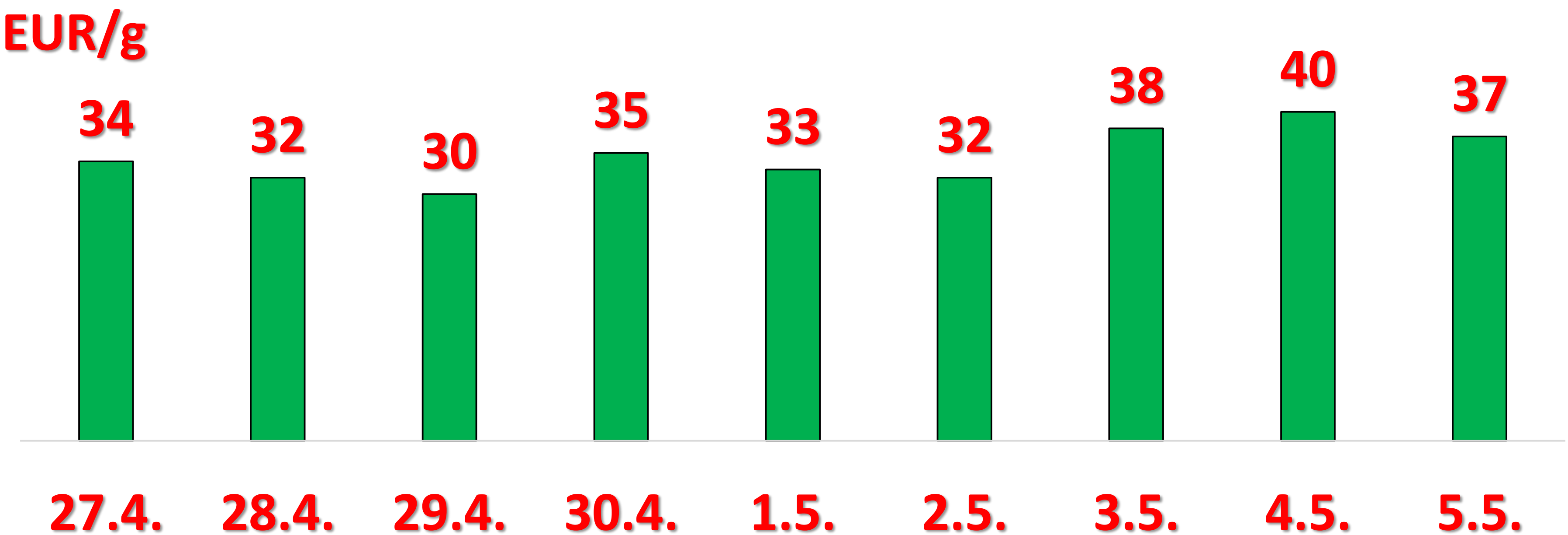
Superchytrá umelá inteligencia, ktorá sa nikdy nemýli, nám predpovedala, ako sa bude vyvíjať cena zlata v nasledujúcich dňoch:



Motivácia

Príklad 1.

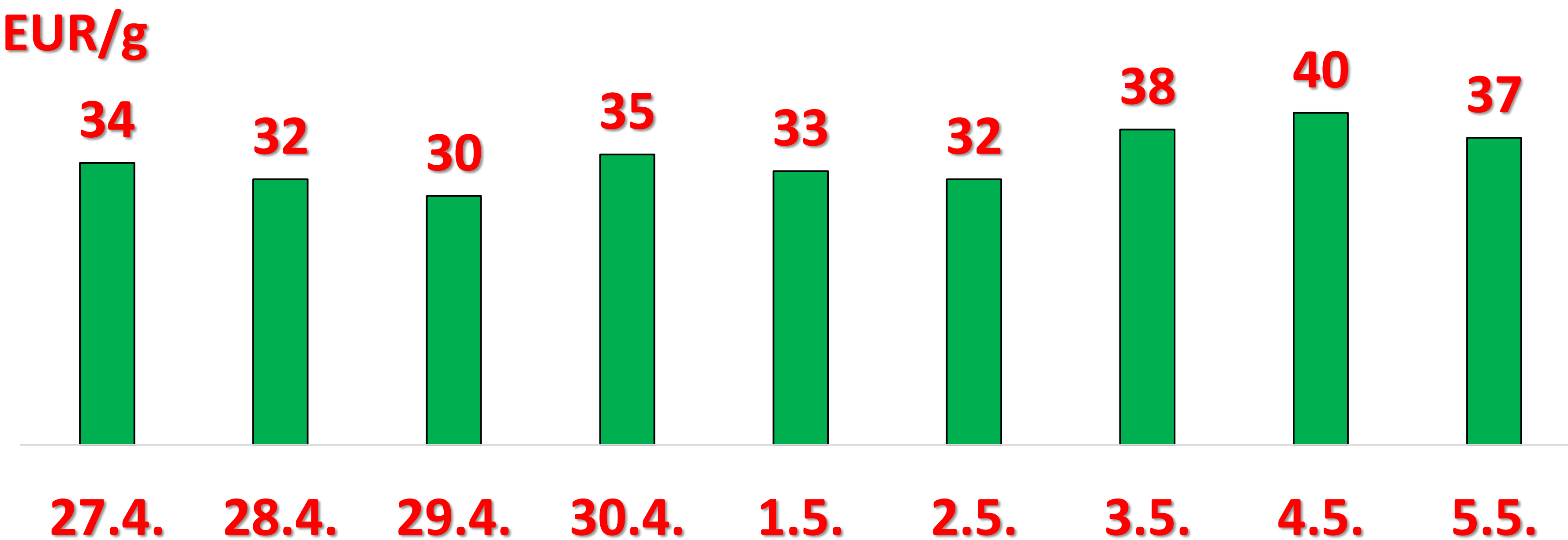
- Máme v hotovosti **300 eur**.
- Ako s ním obchodovať, aby sme si čo najviac zarobili?



Motivácia

Príklad 1.

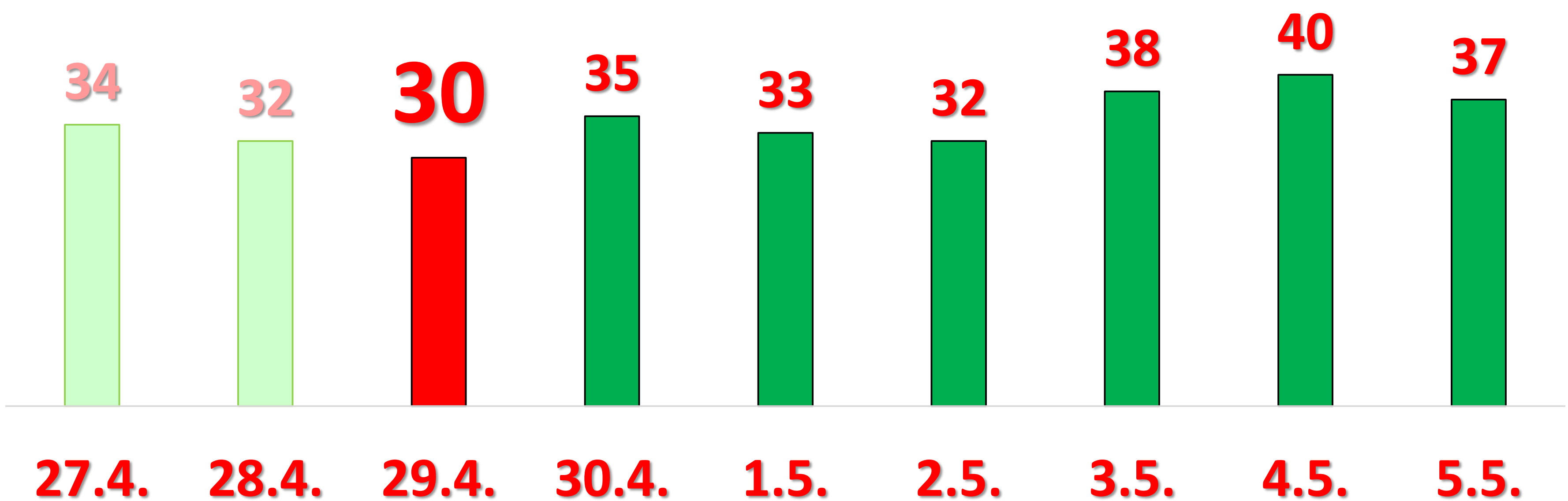
- Vieme získať na konci posledného dňa **400 EUR**?
- A dá sa dosiahnuť ešte viac?
- **Ako postupovať optimálne?**



Motivácia

Príklad 1.

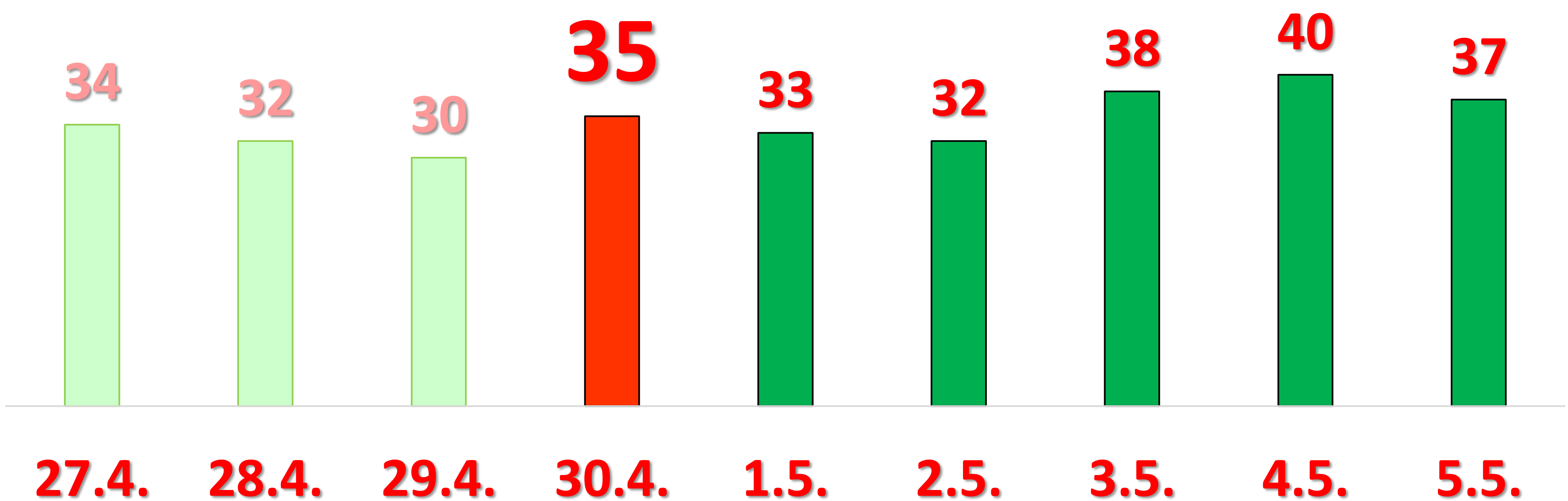
- Počkáme, kým cena klesne na 30 EUR/g.
- Vtedy nakúpime za všetky peniaze 10 gramov zlata.
- **300 EUR = 10 g x 30 EUR/g**



Motivácia

Príklad 1.

- Na druhý deň ho zase všetko predáme.
- **10 g x 35 EUR/g = 350 EUR**
- takže budeme mať 350 eur



Pozorovanie

- V našej stratégii na riešenie úlohy sa striedajú dva kroky:

  počkáme na lacné zlato a nakúpime;

  počkáme na drahé zlato a predáme.

- Ako exaktne definovať, čo je „lacné zlato“,

  a teda kedy nakupovať a kedy predávať?

Greedy stratégia

- Cena zlata sa mení v noci.
- Teda každý večer môžeme **pažravo** (nenásytne) rozhodnúť, či chceme zlato alebo peniaze, a podľa toho nakúpiť alebo predať.

Dôležitý poznatok:

- Stretávame sa so situáciou, kedy sme **globálne optimálne riešenie** zostrojili tak, že sme postupne urobili **niekoľko lokálne optimálnych rozhodnutí.**

Motivácia

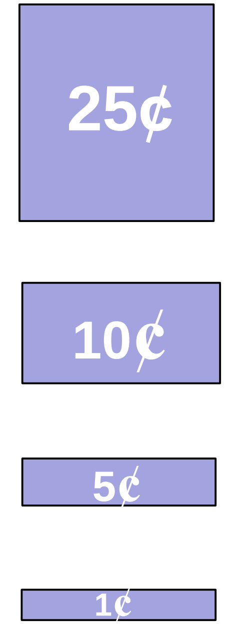
Príklad 2.

- Predpokladajme, že budeme platiť mincami.
- Naše mince majú hodnoty

  25¢, 10¢, 5¢ a 1¢

  máme ich dosť

  chceme zaplatiť **63¢**.



- Pri platbe chceme použiť čo <u>najmenej</u> mincí!

Greedy stratégia

Zvolíme nasledujúci algoritmus:

hodnoty mincí

25¢

10¢

5¢

1¢

63¢

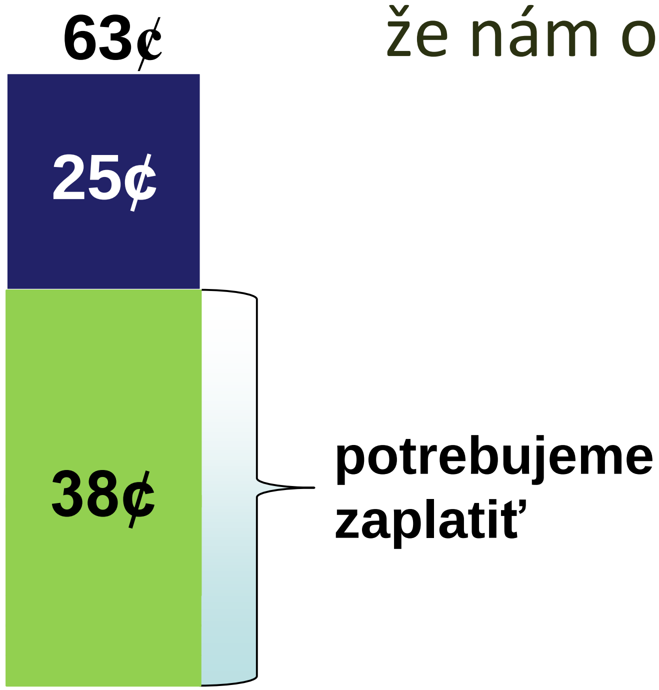
potrebujeme zaplatiť

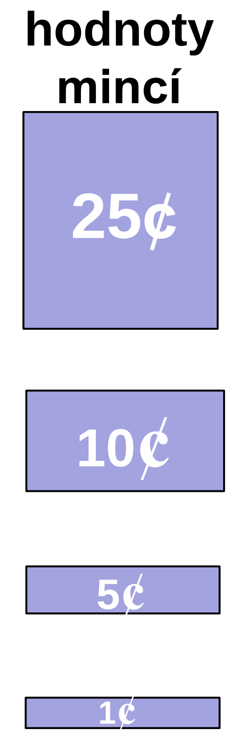
Doteraz použité mince:

Greedy stratégia

Zvolíme nasledujúci algoritmus:

- Zaplatíme najväčšou mincou nie väčšou ako 63¢, pridáme ju do zoznamu mincí, ktorými platíme a odpočítame jej hodnotu od 63¢ a dostaneme, že nám ostáva nám zaplatiť ešte 38¢;



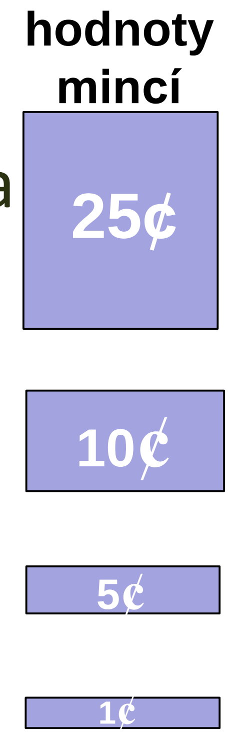


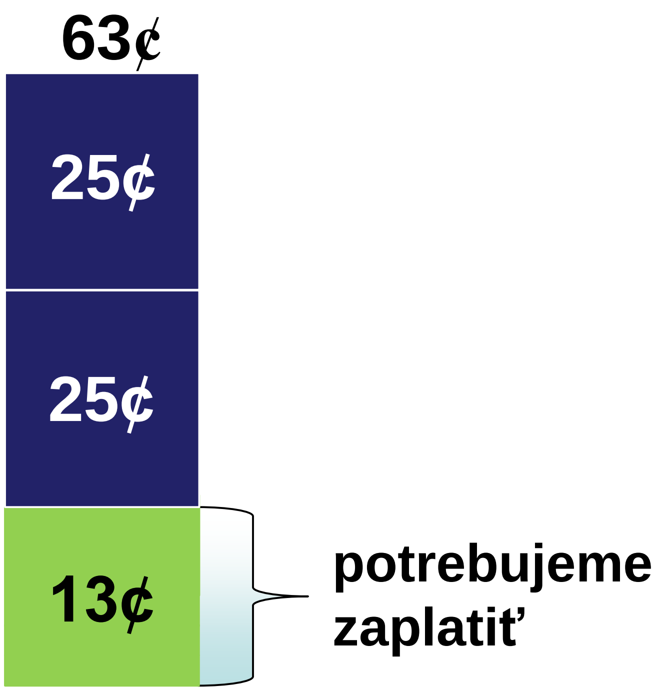
Doteraz použité mince:
25¢

Greedy stratégia

Zvolíme nasledujúci algoritmus:

- Potom vyberieme najväčšiu mincu, ktorej hodnota nie je väčšia ako 38¢, pridáme do zoznamu mincí, ktorými platíme a ostáva nám zaplatiť 13¢;





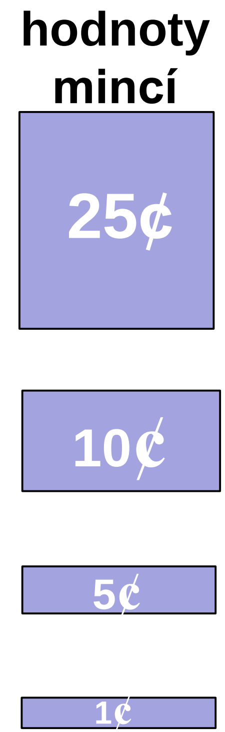
Doteraz použité mince:
25¢, 25¢

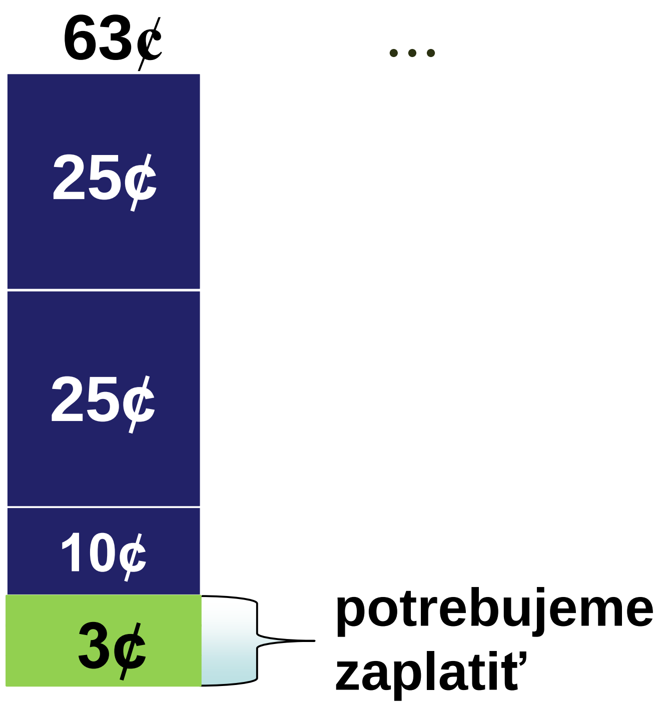
Greedy stratégia

Zvolíme nasledujúci algoritmus:

- Opäť vyberieme najväčšiu mincu, ktorej hodnota nie je väčšia ako 13¢, pridáme do zoznamu mincí, ktorými platíme a ostáva nám zaplatiť ešte 3¢;

…





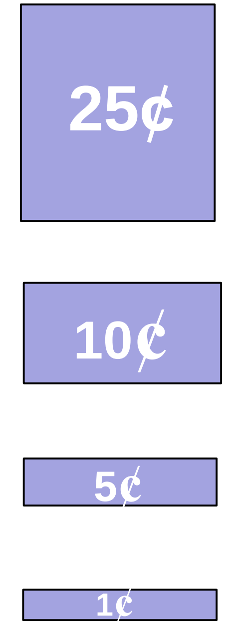
Doteraz použité mince:
25¢, 25¢, 10¢

Greedy stratégia

Zvolíme nasledujúci algoritmus:

- ... takýmto postupom následne vyberieme ešte trikrát mincu v hodnote 1¢ a získali sme riešenie.

hodnoty mincí



63¢

v tomto prípade greedy stratégia
poskytne optimálne riešenie
vďaka vhodným hodnotám mincí

Doteraz použité mince:
25¢, 25¢, 10¢, 1¢, 1¢, 1¢

Greedy stratégia

Zmena !

- Naše mince majú teraz hodnoty

  11¢, 5¢ a 1¢

  máme ich dosť

  chceme zaplatiť **15¢**.

hodnoty mincí

11¢

5¢

1¢

Greedy stratégia

Zmena !

- podľa tejto stratégie by sme vybrali:

15¢

11¢

1¢

1¢

1¢

1¢

5 mincí

hodnoty mincí

11¢

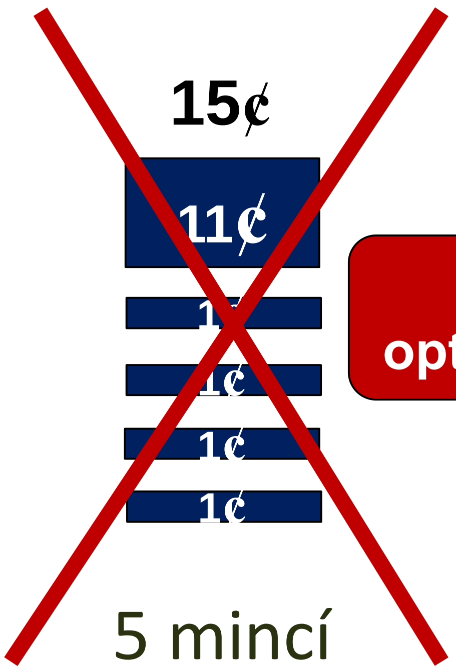
5¢

1¢

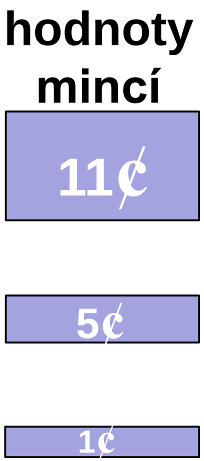
Greedy stratégia

Zmena !

- podľa tejto stratégie by sme vybrali:



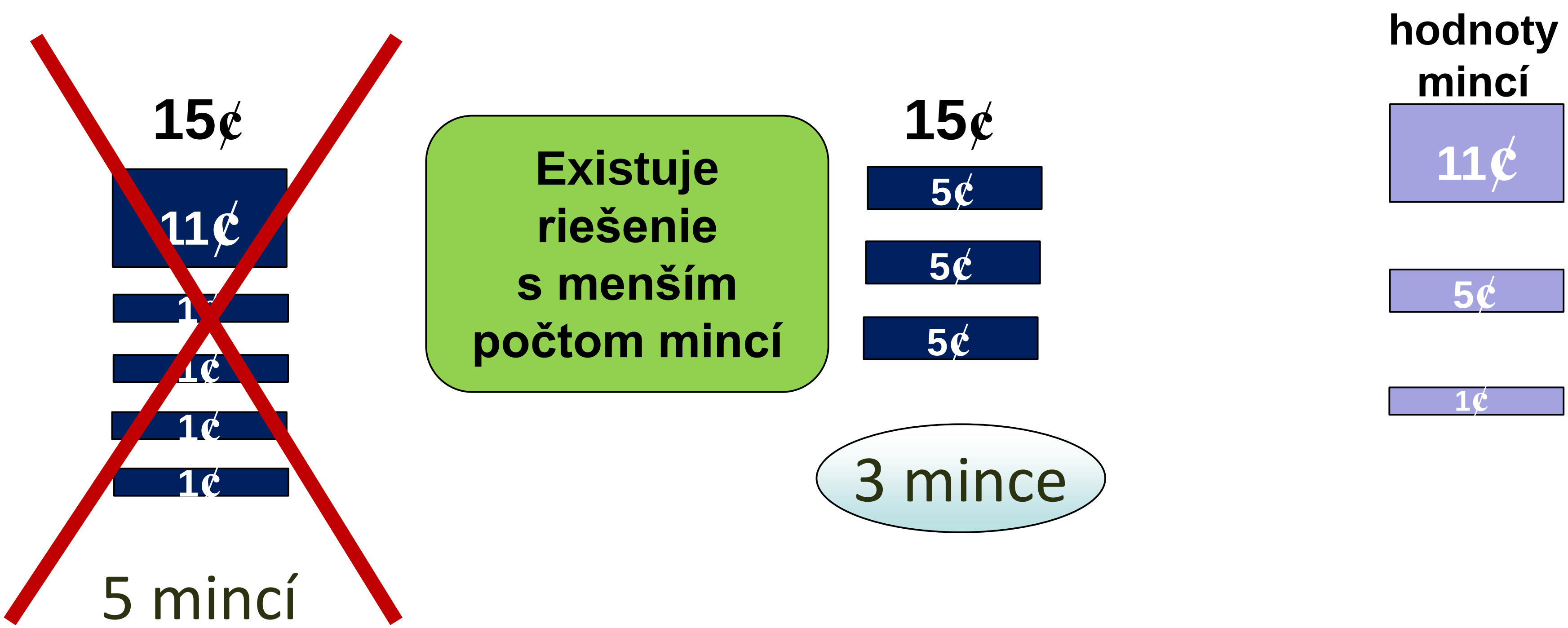
Toto nie je optimálne riešenie



Greedy stratégia

Zmena !

- podľa tejto stratégie by sme vybrali:



Greedy algoritmy

Greedy algoritmy riešia **optimalizačné problémy** pomocou postupností výberov položiek do riešenia.

Výbery musia byť:

- *Realizovateľné*
  – *musia zachovať obmedzenia problému*
- *Lokálne optimálne*
  – *musia poskytovať najlepší lokálny výber medzi všetkými možnými výbermi v danom kroku*
- *Nezrušiteľné*
  – *raz urobený výber prvkov do postupnosti je nezmeniteľný, nedá sa zobrať späť a opraviť*

Greedy algoritmy

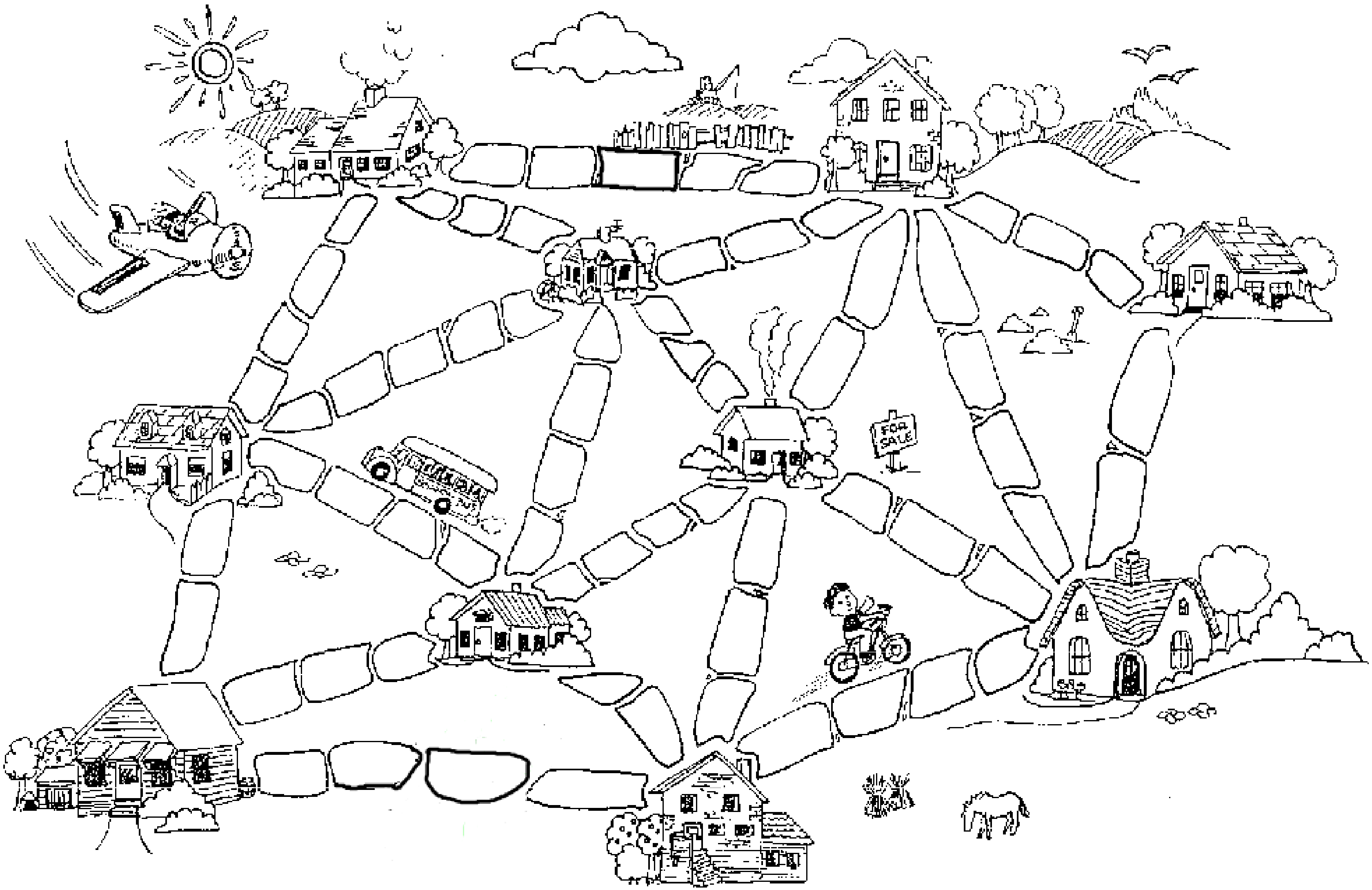
Pre niektoré optimalizačné problémy „greedy“ prístup nedáva optimálny výsledok.

videli sme to v posledno príklade

Čo sa deje

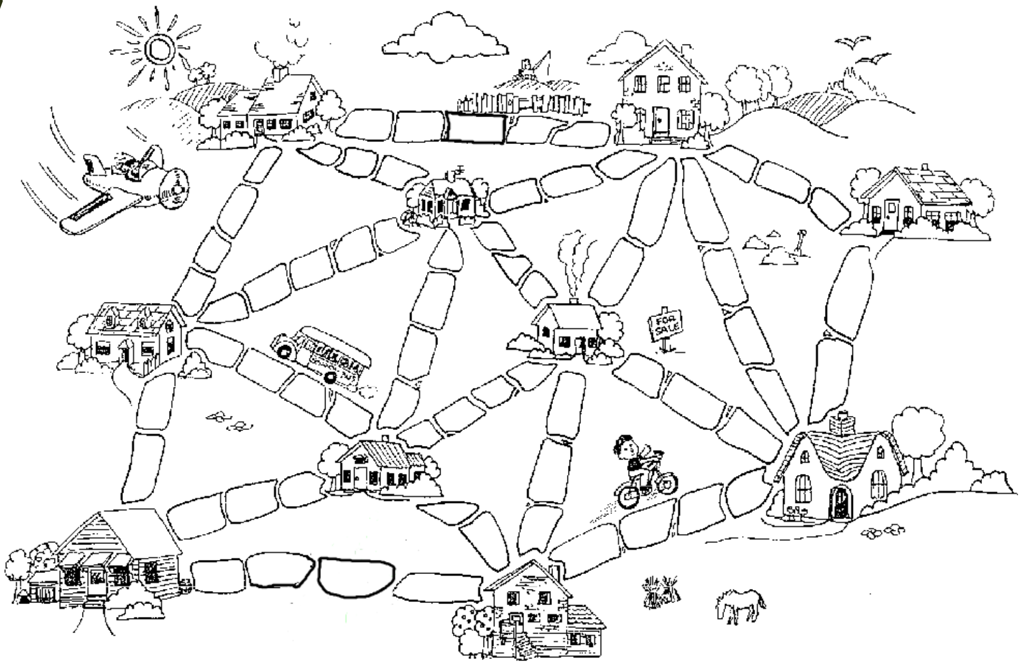
- Každá iterácia v greedy algoritme pozostáva z nasledujúcich častí:
  - Výber - vyberá ďalšiu položku
  - Kontrola realizovateľnosti - výber položky tak, aby spĺňala obmedzenia problému
  - Kontrola lokálneho optima - overuje, či výber vytvára lokálne optimálne riešenie
  - Kontrola riešenia - zisťuje, či je globálne riešenie už dosiahnuté alebo nie

Úloha o dláždení



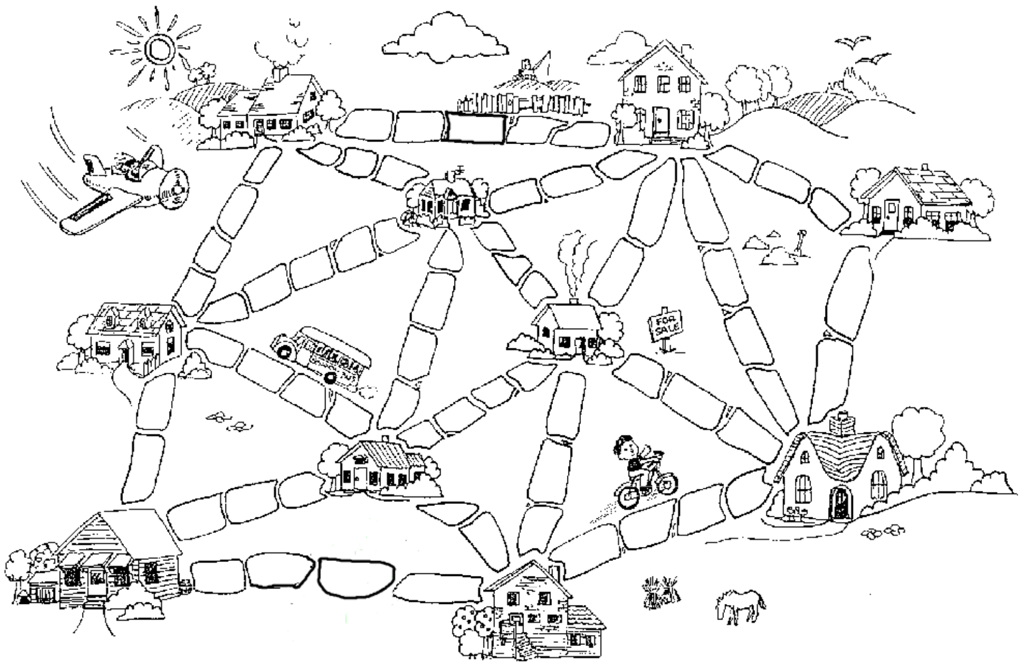
Úloha o dláždení

- V odľahlej malej horskej obci chce starosta konečne vyriešiť problém s cestou medzi jednotlivými domami.
  - domy nie sú umiestnené na jednej ulici, ale sú od seba vzdialené rôzne vzdialenosti a cestičky sú len vychodené, bez povrchovej úpravy

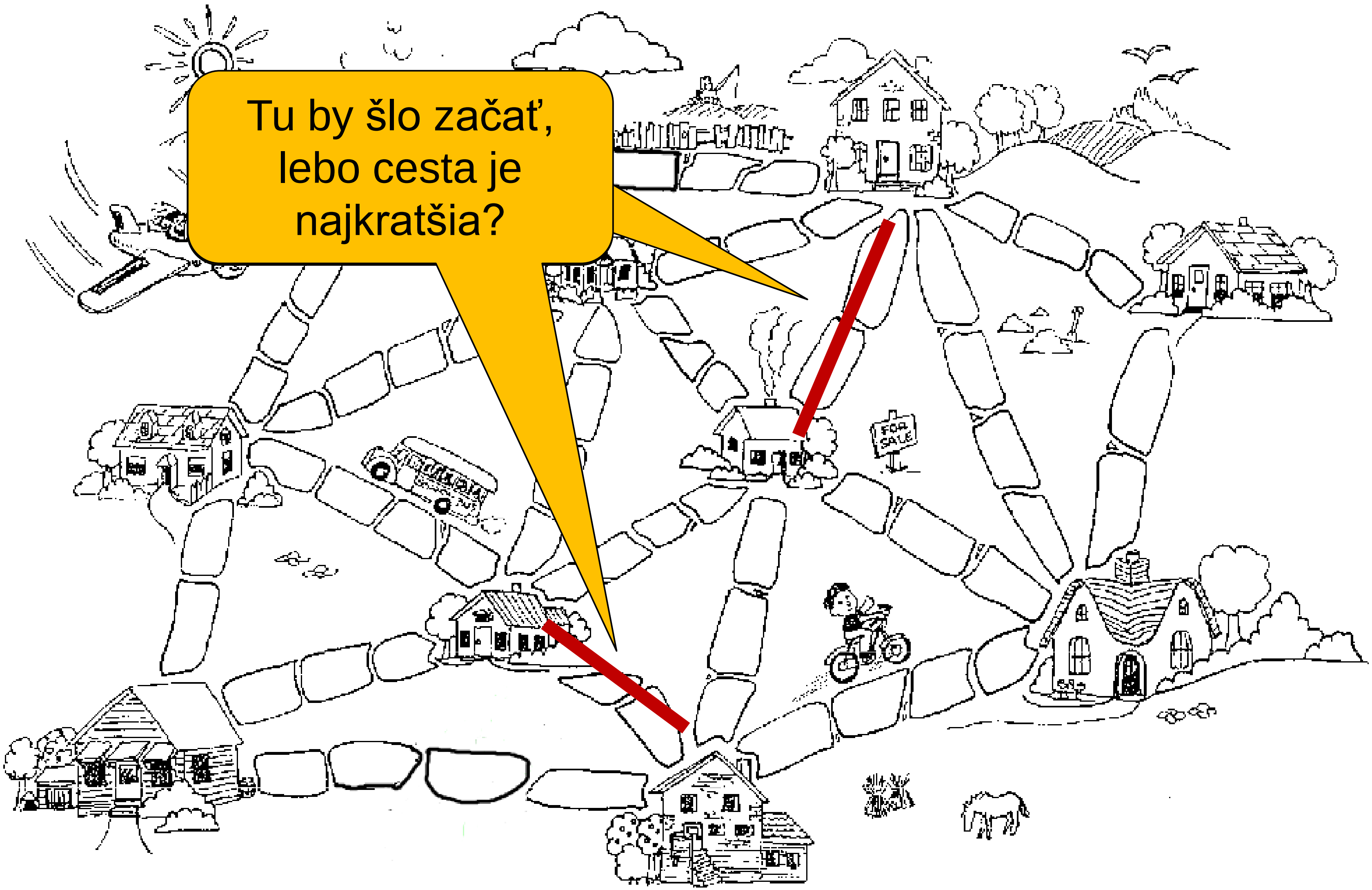


Úloha o dláždení

- Starosta chce vybudovať nové dláždené cesty medzi niektorými domami tak, aby:
  - sa dalo medzi ľubovoľnými dvoma domami prejsť po novej ceste,
  - ale zároveň chce, aby budoval čím menej metrov ciest.
- Stojí pred otázkou medzi ktorými domami ich má vybudovať?



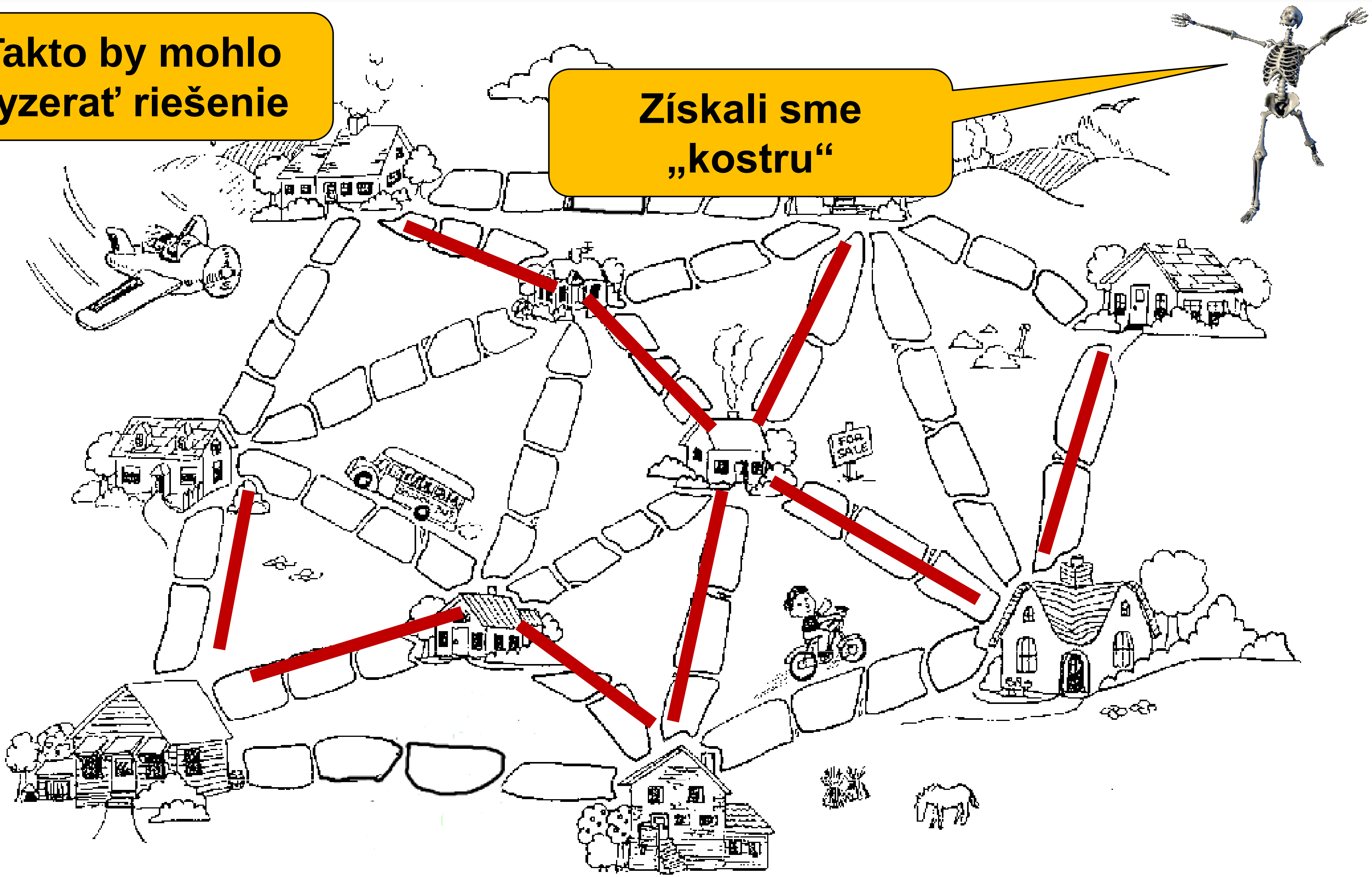
Úloha o dláždení



Úloha o dláždení

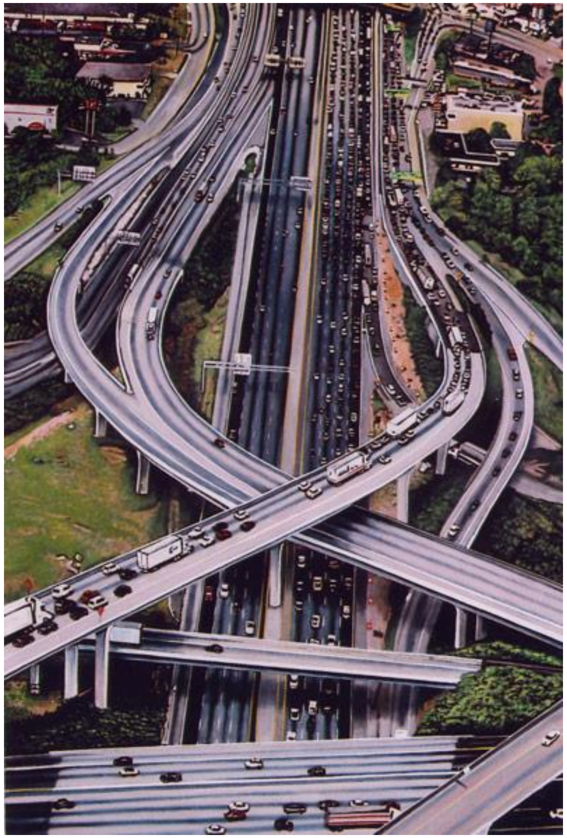
Takto by mohlo vyzerať riešenie

Získali sme „kostru“



Minimálna kostra – motivácia

- Uvažujme dopravnú sieť
- Máme nejaké peniaze z EÚ na výstavbu diaľnic
- Ktoré cesty máme prerobiť na diaľnice, aby existovalo (nie nutne priame) **spojenie medzi každými 2 mestami** výhradne po diaľniciach a pritom aby sme minuli, čo najmenej financií
- Vstup: pre každý úsek spájajúci 2 mestá sú dané náklady na jeho prestavbu na diaľnicu



Iné praktické motivácie

- Telefónna sieť: ktoré linky prebudovať na optické, aby bolo možné presmerovať všetky hovory po optických linkách
a chceme pritom minúť čo najmenej financií?
- Algoritmus na riešenie ako prvý navrhol v roku 1926 Otakar Borůvka, keď riešil problém efektívnej konštrukcie elektrickej siete na Morave.

Zdroj:https://encyklopedie.brna.cz/home-mmb/?acc=profil_osobnosti&load=2471

Minimálna kostra grafu

- ***Kostra (spanning tree)*** súvislého grafu *G:*

  súvislý acyklický podgraf grafu *G,*

  ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu G

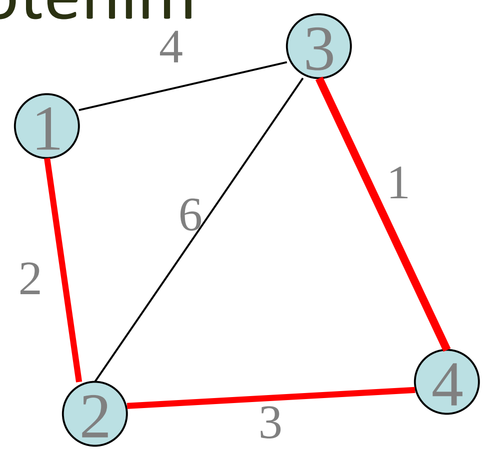
- ***Minimálna kostra (minimal spanning tree)*** ohodnoteného súvislého grafu *G:*

  kostra grafu *G* s minimálnym ohodnotením

  Príklad:

  - minimálna kostra

    – hrany s ohodnotením 1, 2, 3



Vlastnosti kostier (bez dôkazu)

- Graf môže mať veľa kostier.
- Hrany kostry nevytvárajú cyklus.
- Každá kostra grafu s *n* vrcholmi má práve *n-1* hrán.
- Pridanie ľubovoľnej nekostrovej hrany ku kostre vytvorí cyklus.
- Medzi každými 2 vrcholmi grafu existuje jediná cesta využívajúca len kostrové hrany.

Minimálna kostra grafu

- **Vstup**:

  súvislý, neorientovaný, ohodnotený graf;

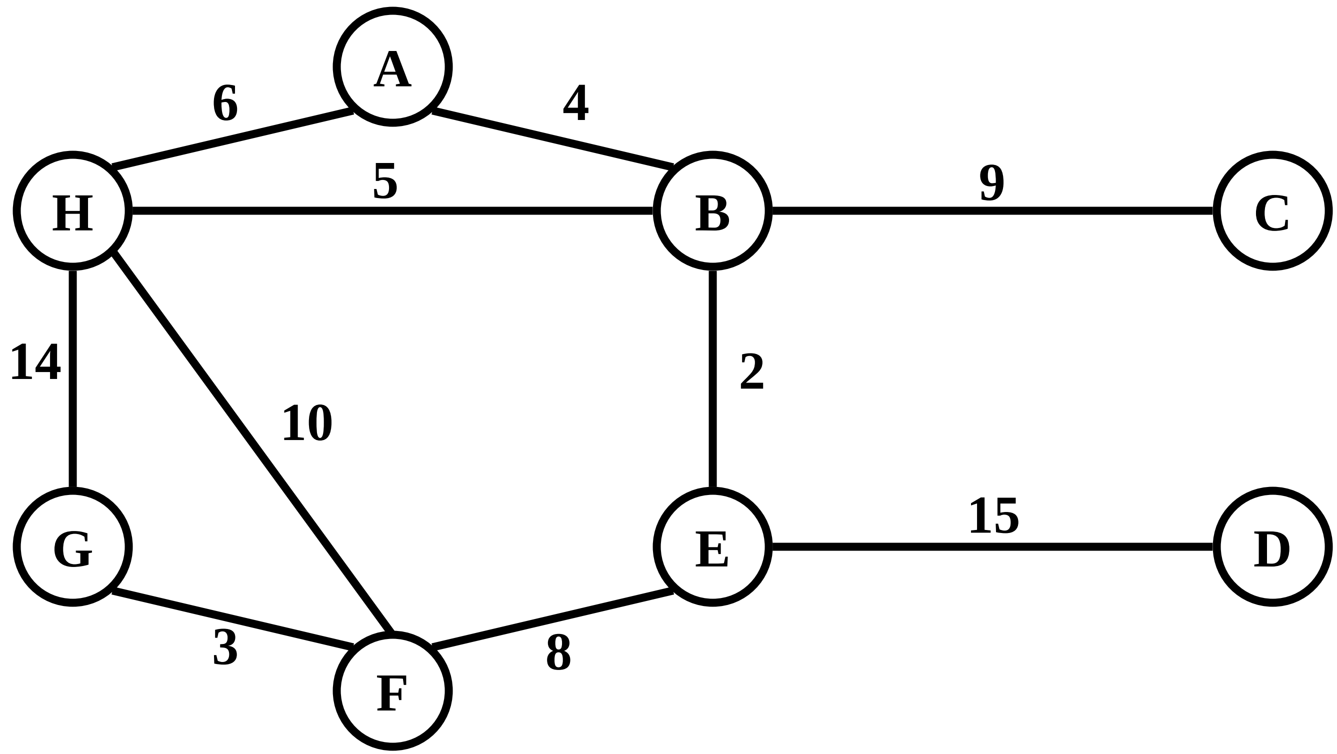
- **Problém**:

  nájsť minimálnu kostru grafu;

  použitím hrán, ktoré minimalizujú celkové ohodnotenie.

Minimálna kostra grafu

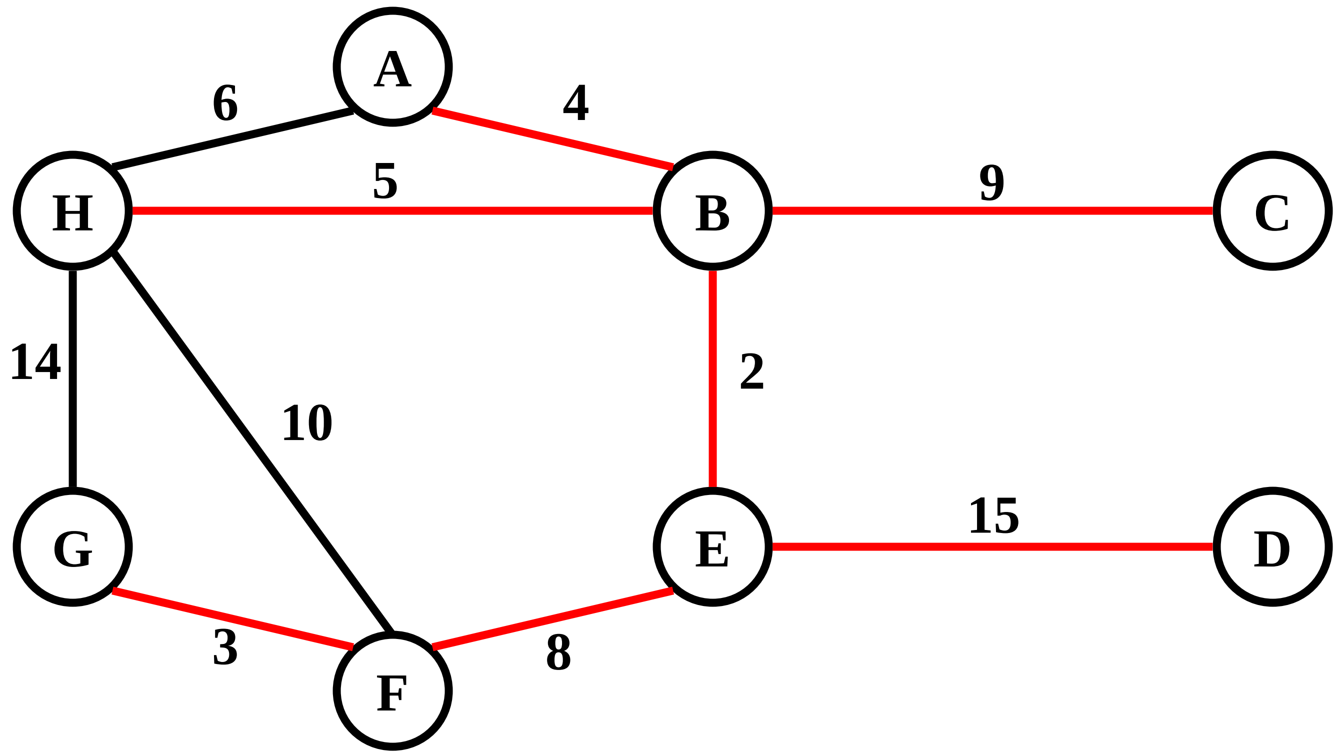
- Ktoré hrany tvoria minimálnu kostru grafu na tomto obrázku?



Minimálna kostra grafu

- Odpoveď:

  - Cena kostry: ?



Primov (Jarník, Dijkstra) algoritmus

- Tvorbu kostry začneme jedným vrcholom - strom T_1.
- V každom kroku skonštruujeme T_{i+1} z T_i:
  - pridáme hranu s minimálnym ohodnotením vychádzajúcu z vrcholu v strome T_i a vedúcu do vrcholu, ktorý ešte nie je v strome

„greedy" krok:
výber z „okrajových" hrán
s minimálnym ohodnotením

- Takto konštruujeme postupnosť expandujúcich stromov T_1, T_2, ...
- Algoritmus sa zastaví, keď sú do kostry pridané všetky vrcholy.

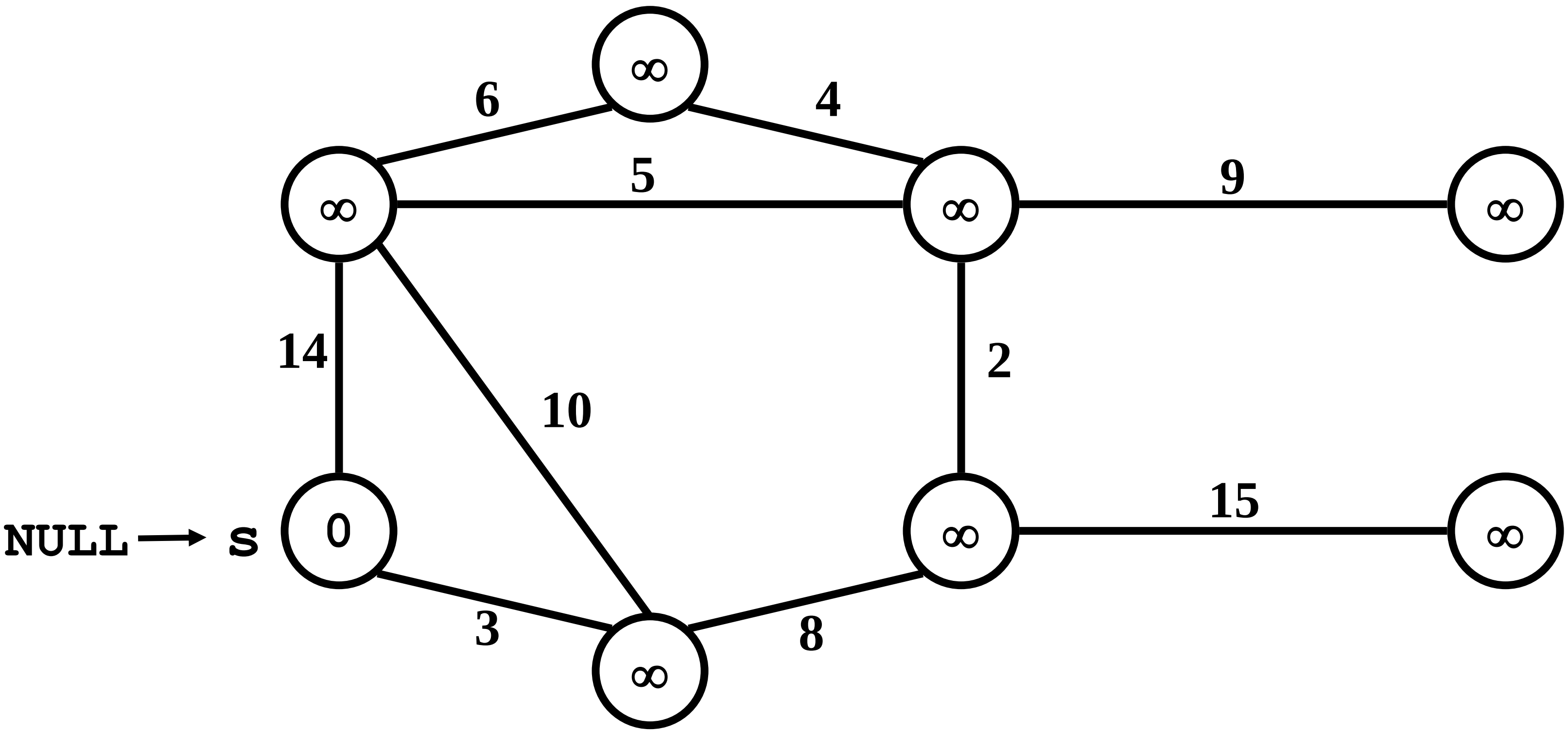
Primov algoritmus

```
ds[s] = 0;
p[s] = NULL;
for (v: vrcholy G okrem s)
    ds[v] = ∞;
Q = vrcholy G;
while (!Q.isEmpty()) {
    vyber v z Q taký, že
          ds[v] = min{ds[u]|u patrí do Q}
    for (w: susedia vrcholu v)
          if (w ∈ Q and c(v,w) < ds[w] ){
                p[w] = v;
                ds[w] = c(v,w);
          }
}
```

Q je množina „zatiaľ nevybavených“ vrcholov

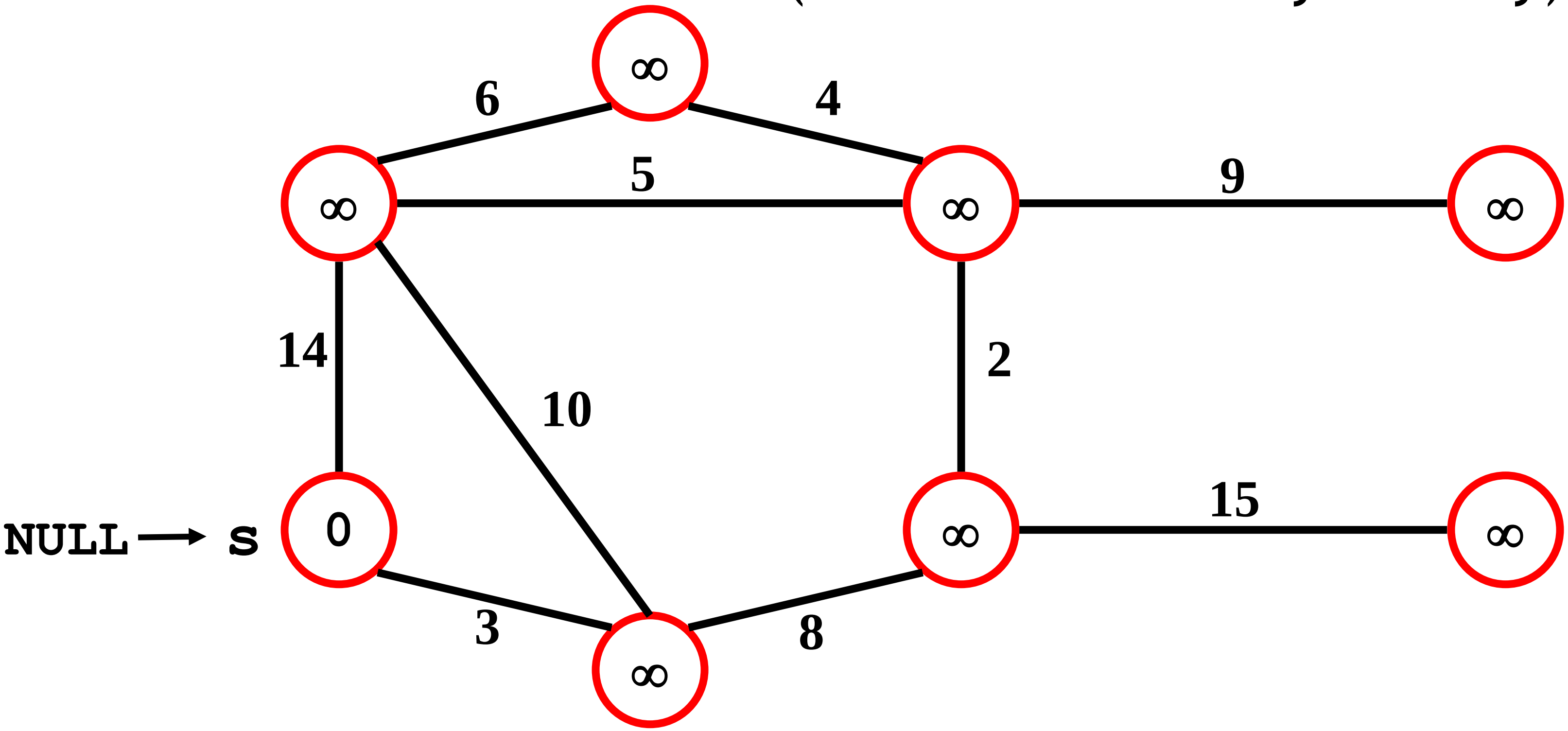
Upravíme hodnoty a predchodcov pre všetky hrany vychádzajúce z v

Primov algoritmus - simulácia

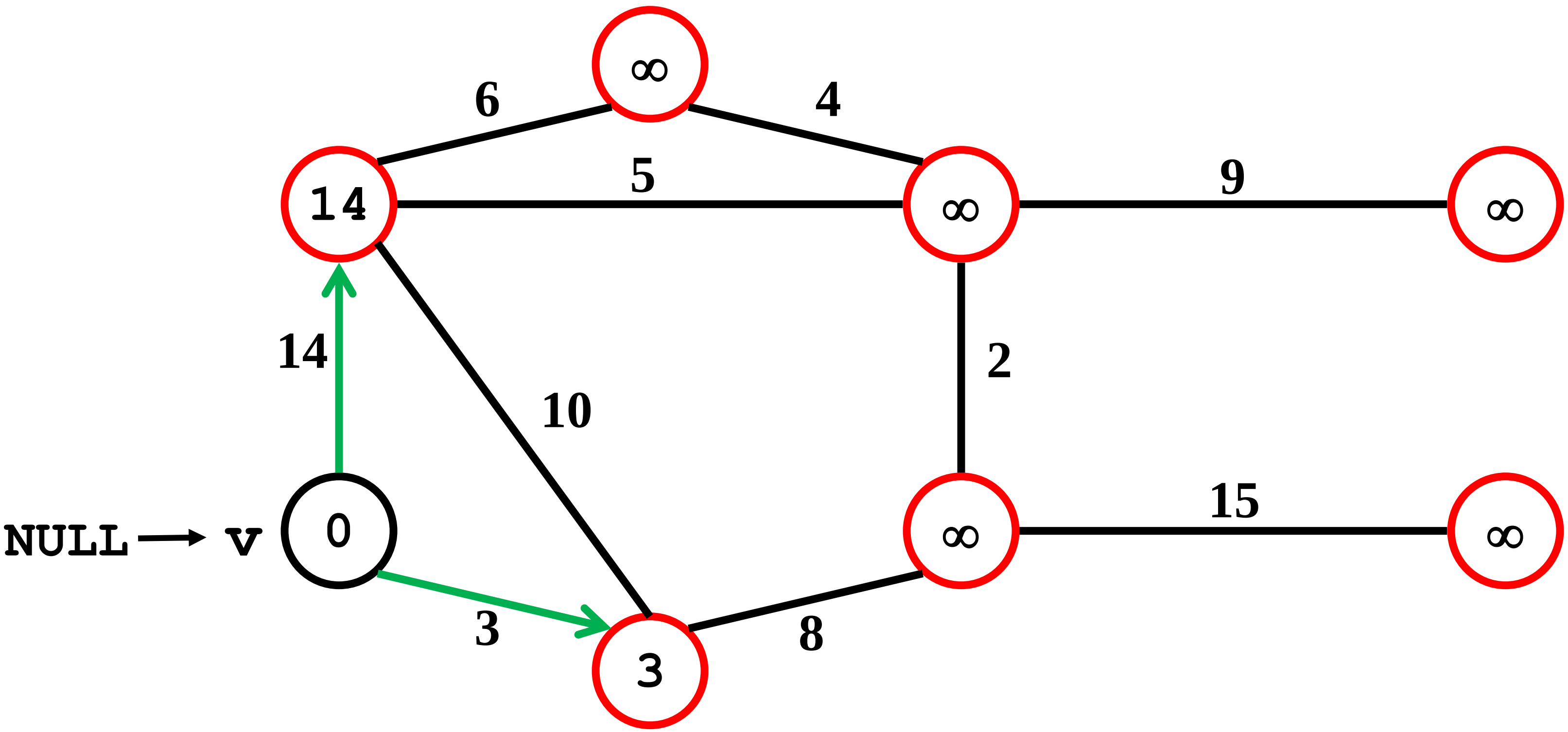


Primov algoritmus - simulácia

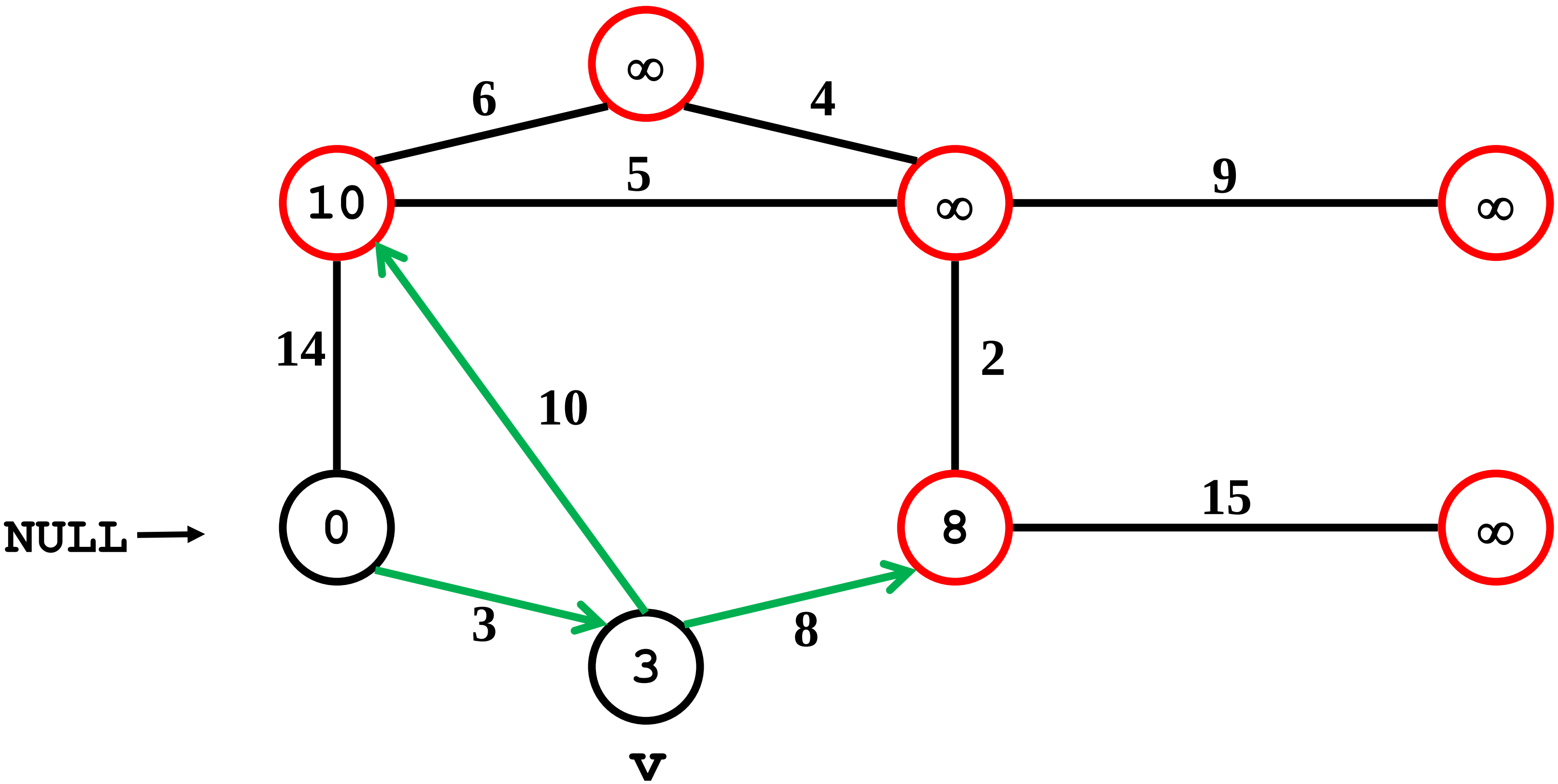
Q - množina „zatiaľ nevybavených“ vrcholov (na začiatku všetky vrcholy)



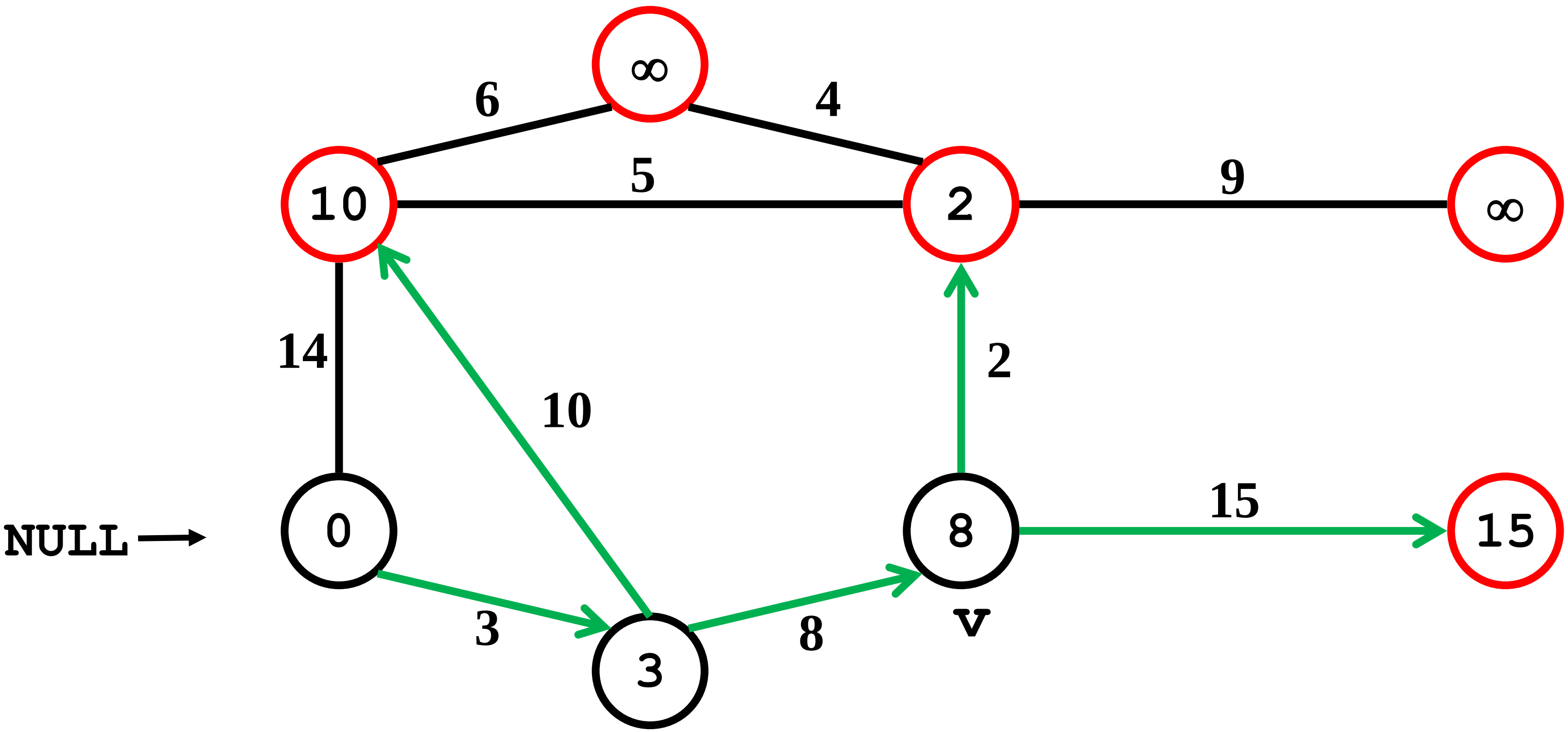
Primov algoritmus - simulácia



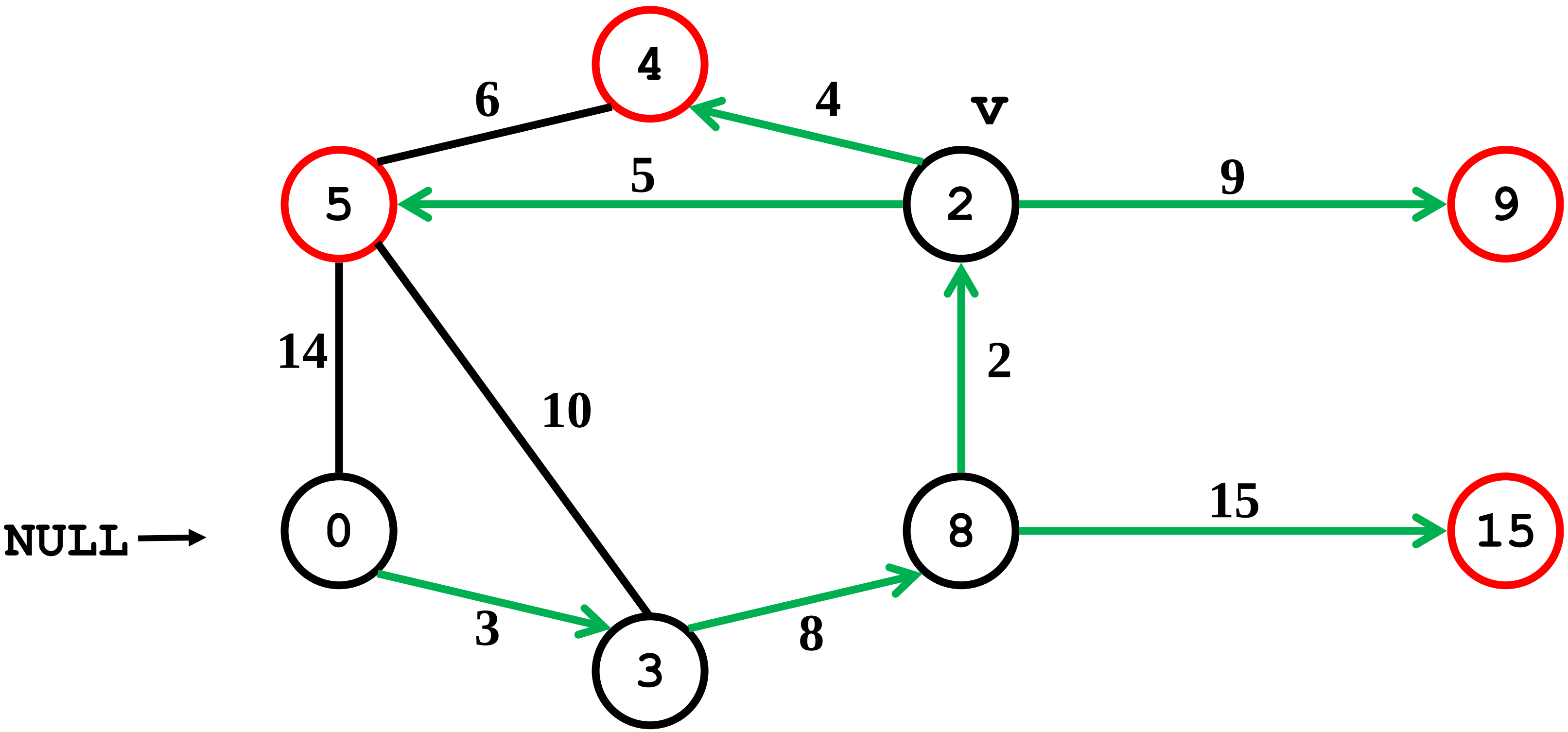
Primov algoritmus - simulácia



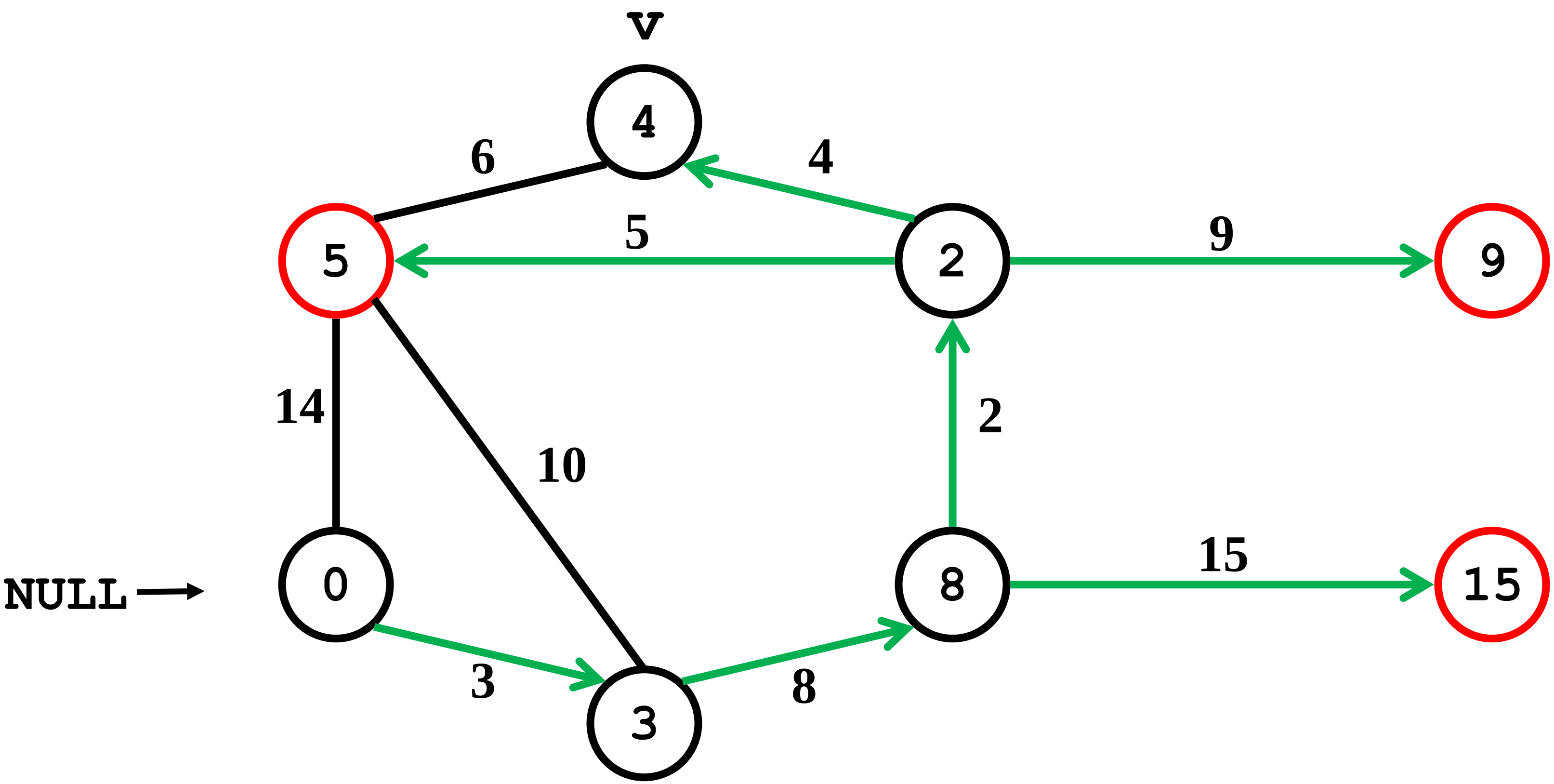
Primov algoritmus - simulácia



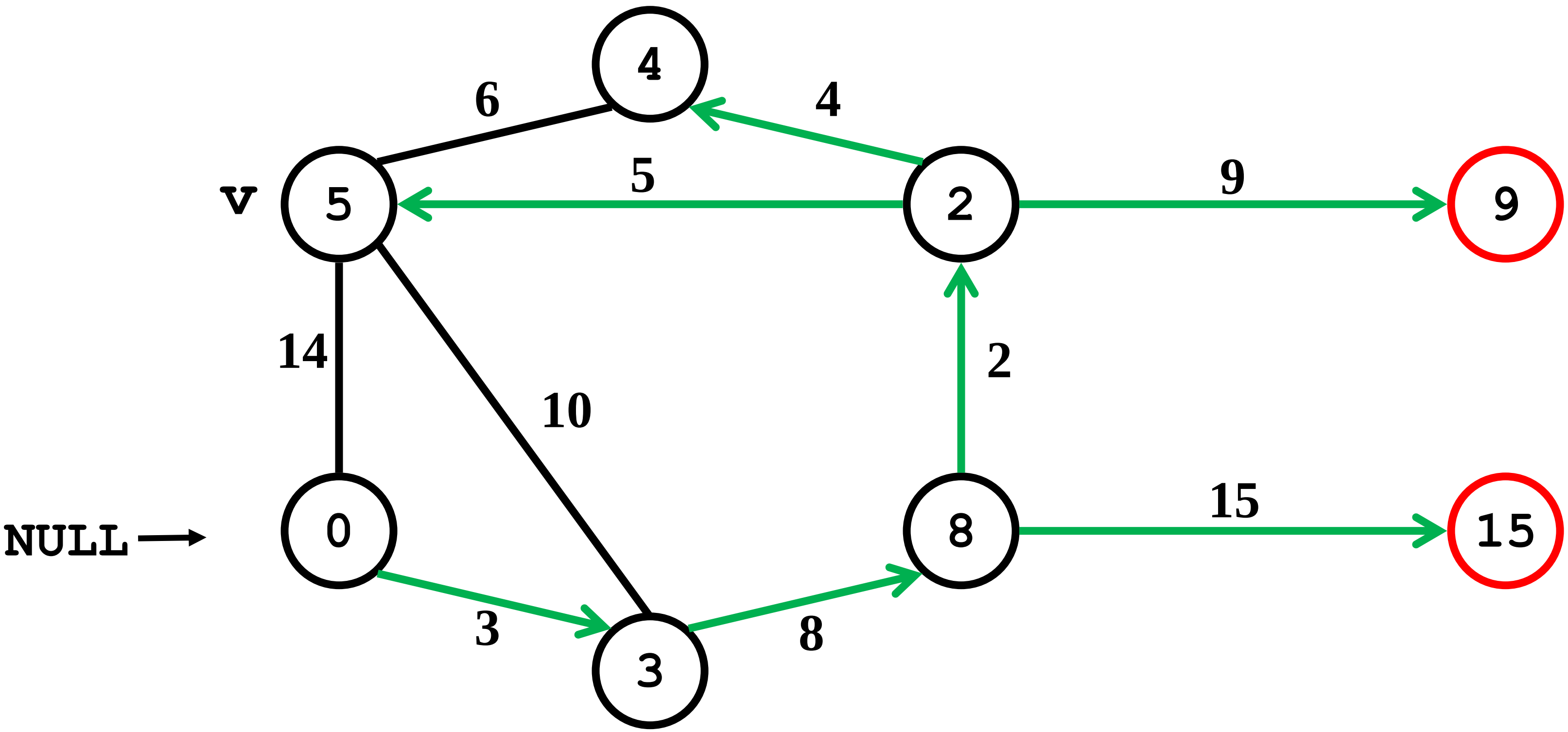
Primov algoritmus - simulácia



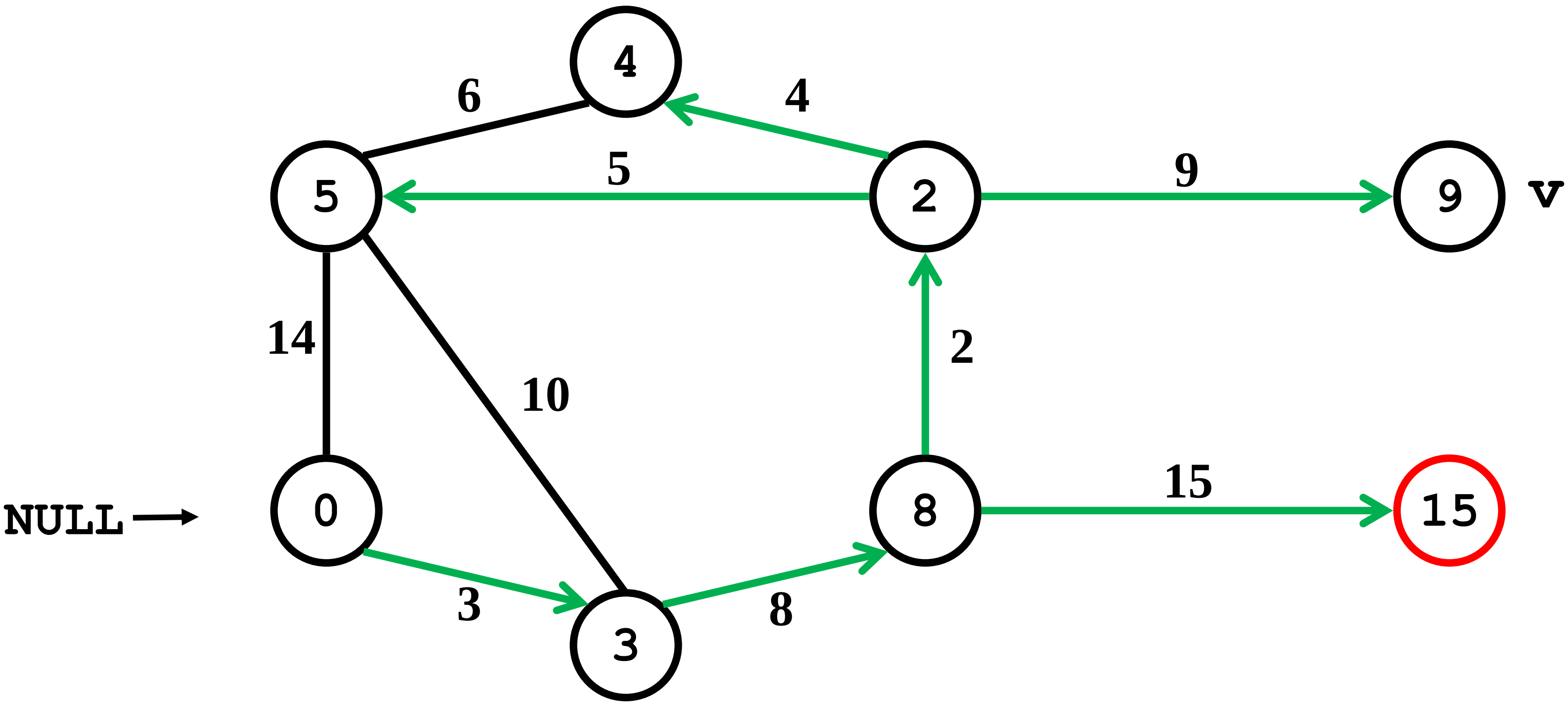
Primov algoritmus - simulácia



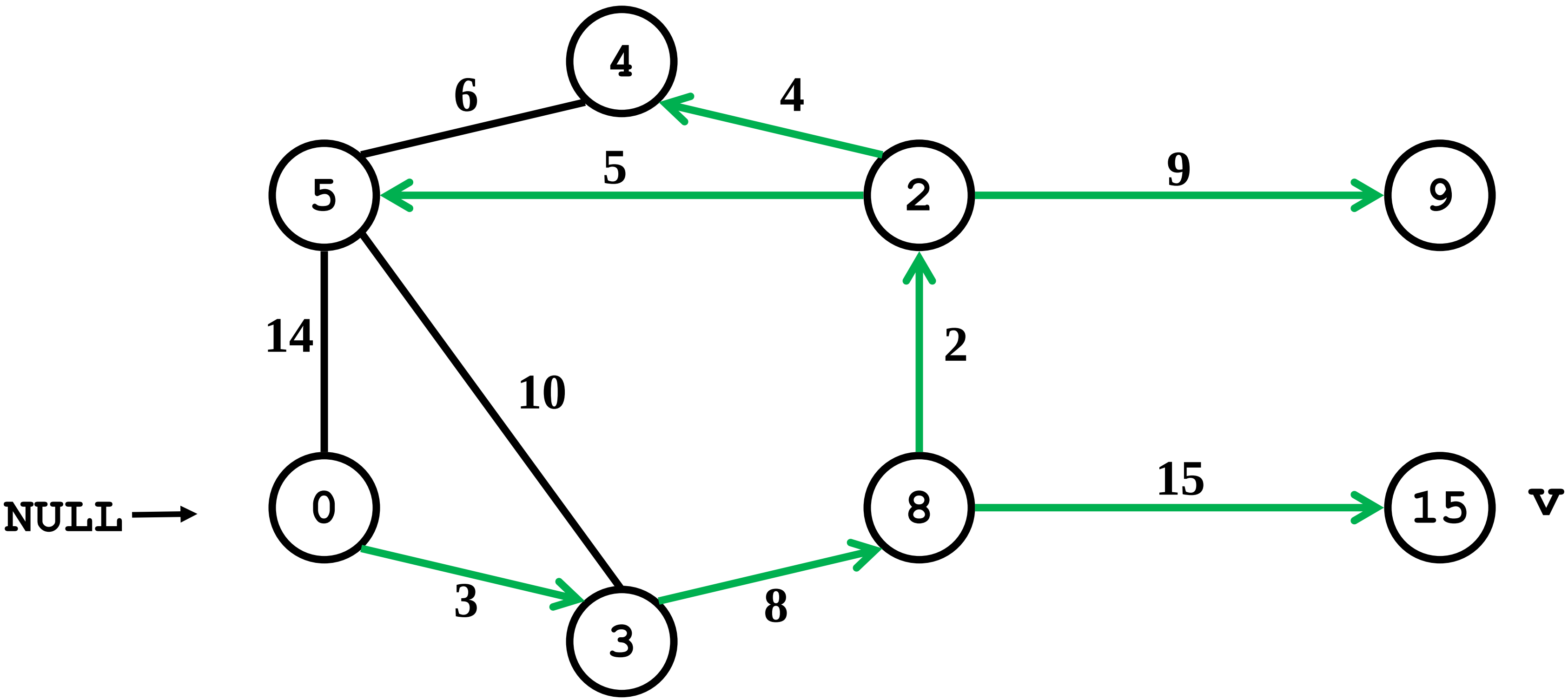
Primov algoritmus - simulácia



Primov algoritmus - simulácia

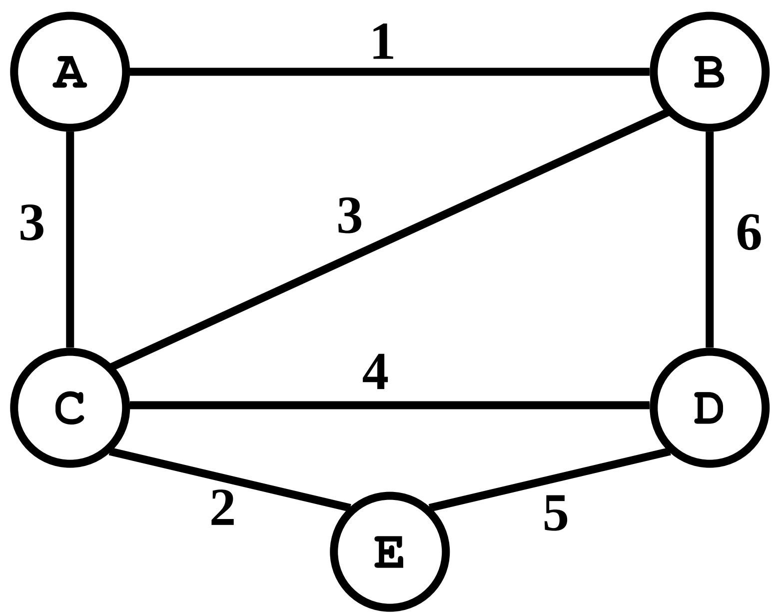


Primov algoritmus - simulácia



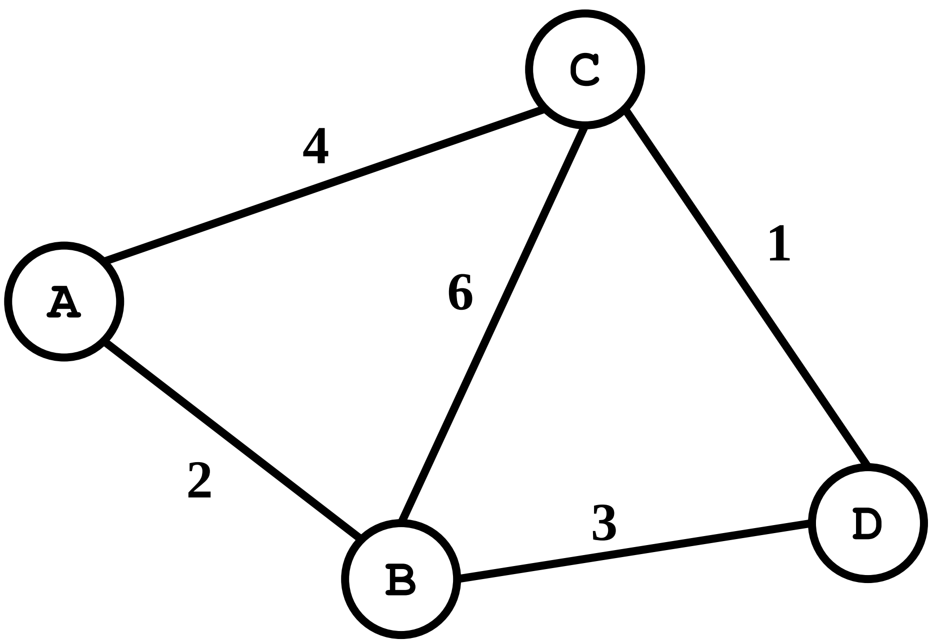
Úloha 1

- Otázka:
  Ak začneme vo vrchole D, ktorý vrchol bude odstránený z Q ako prvý a ktorý ako druhý?



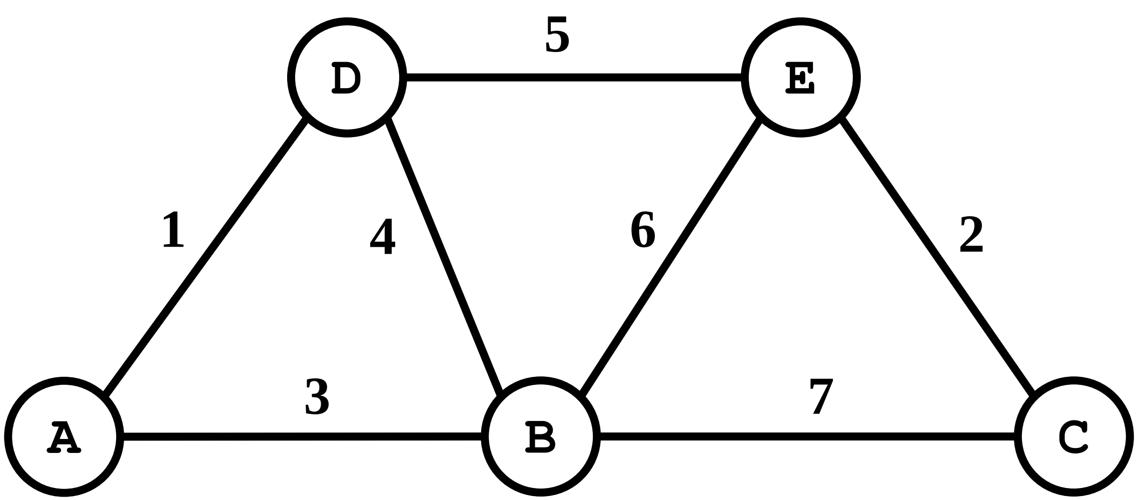
Úloha 2

- Otázka:
  Ak začneme vo vrchole B, ktorý vrchol bude odstránený z Q ako prvý a ktorý ako druhý?



Úloha 3

- Otázka:
  Ak začneme vo vrchole B, ktorý vrchol bude odstránený z Q ako prvý a ktorý ako druhý?



Primov algoritmus - poznámky

- Správnosť (Korektnosť): Dokázať, že algoritmus skutočne počíta minimálnu kostru grafu. Teda „greedy“ algoritmus vypočíta optimálne riešenie.

- *Efektívnosť:* Ak použijeme prioritný rad na nájdenie okrajovej hrany s najnižším ohodnotením: *min-heap (pre hrany), tak* pre graf s *n* vrcholmi a *m* hranami máme:

$$\underbrace{(n - 1}_{\text{počet krokov}} + m) \log n$$

vloženie/vymazanie z min-heap

počet krokov

(min-heap vymazania)

počet uvažovaných hrán

(min-heap vloženia)

$\Theta(m \log n)$

Zložitosť záleží od použitých dátových štruktúr

Primov algoritmus – dôkaz správnosti

- Nech ***G*** je súvislý ohodnotený graf.
- V každej iterácii Primovho algoritmu je pridaná hrana, ktorá má jeden vrchol v podgrafe vytvárajúcom kostru a vrchol mimo tohto podgrafu.

- Pretože ***G*** je súvislý, existuje vždy cesta z každého do každého vrcholu.
- Výstup ***Y*** Primovho algoritmu je strom, pretože vrchol a hrana, ktoré sú pridané do ***Y*** sú kontrolované na cyklus v grafe.

Primov algoritmus – dôkaz správnosti

Nech Y_1 je minimálna kostra G.

- Ak $Y_1 = Y$, *tak* Y (z algoritmu) je minimálna kostra.
- Inak ($Y_1 \neq Y$, *teda* Y (z algoritmu) nie je minimálna kostra):
    - nech *e* je prvá hrana pridaná počas konštrukcie Y, ktorá nie je v Y_1,
    - a V nech je množina vrcholov spojených hranami pridanými do Y pred pridaním *e*.
- Potom jeden koncový bod *e* je vo V a druhý nie je.
- Keďže Y_1 je kostra G, existuje cesta v Y_1 *spájajúca tieto dva koncové vrcholy hrany e*.
  Keď prechádzame pozdĺž tejto cesty, musíme naraziť na hranu *f* spájajúcu vrchol vo V s vrcholom, ktorý nie je vo V.

Primov algoritmus – dôkaz správnosti

- Teraz, v iterácii, keď je pridávaná hrana *e* do *Y*,

  f by mohla byť pridaná tiež a mohla by byť pridaná namiesto *e*

  ak by jej ohodnotenie bolo menšie ako *e*.

- Lenže ***f*** nebola pridaná,

  teda ohodnotenie ***f*** nie je menšie ako ohodnotenie ***e***.

Primov algoritmus – dôkaz korektnosti

- Nech Y_2 je graf získaný z Y_1 odstránením *f* a pridaním *e*.
- Je ľahké ukázať, že:
  - Y_2 je súvislý
  - Y_2 má ten istý počet hrán ako Y_1
  - celková váha hrán v Y_2 nie je väčšia ako v Y_1

  preto Y_2 je tiež minimálna kostra G,
  obsahuje *e* a všetky hrany pridané pred *e* počas konštrukcie *V*
- Opakovaním vyššie uvedených krokov vieme získať minimálnu kostru grafu G, ktorá je identická s *Y*.
- Toto dokazuje, že ***Y*** je **minimálna kostra**.

Kruskalov algoritmus

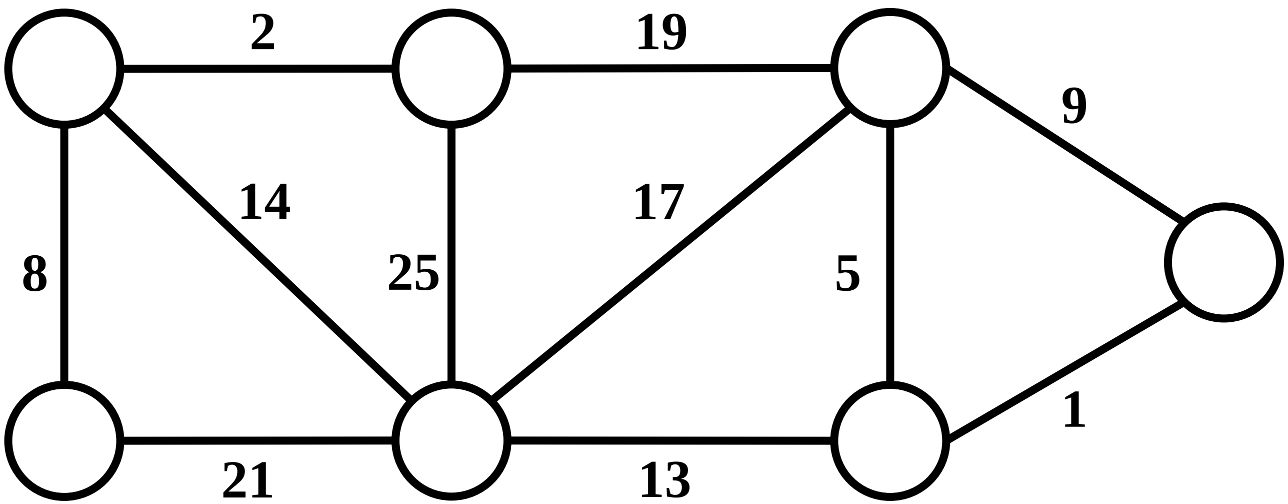
- les – graf bez kružníc, ktorého komponenty sú stromy
- počet vrcholov grafu uvažujme $n > 0$

- Začiatok Kruskalovho algoritmu:
  - hrany sú utriedené podľa rastúceho ohodnotenia,
  - máme les n disjunktných stromov.

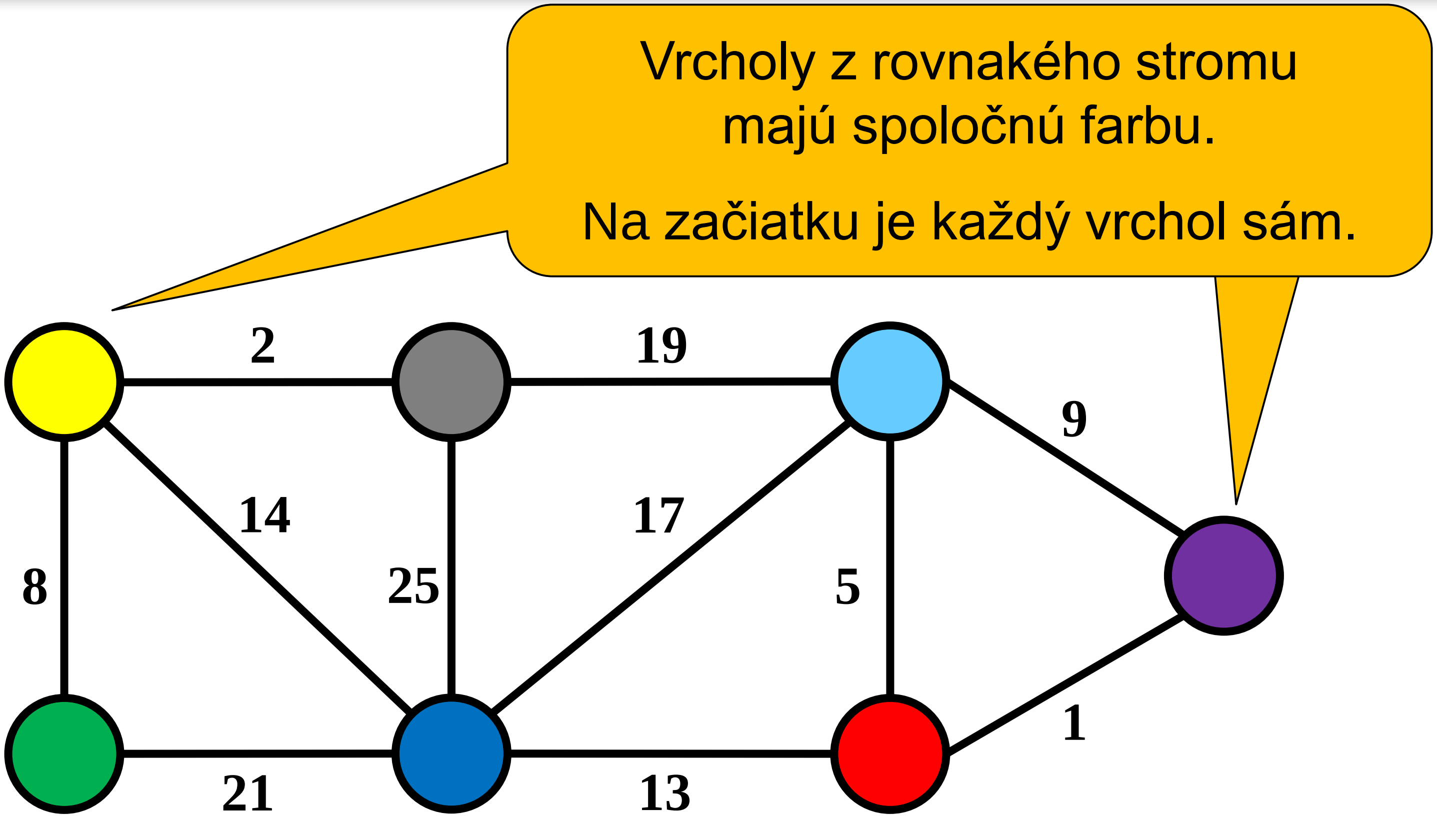
Kruskalov algoritmus

- V každom kroku algoritmu:
  - „porastie” minimálna kostra grafu (minimal spannig tree - MST) o jednu hranu.
  - pridáme hranu s minimálnym ohodnotením do množiny už použitých hrán, ak nevznikne cyklus.
- V priebehu algoritmu jednotlivé kroky vytvárajú obvykle les stromov (nesúvislý graf).

Kruskalov algoritmus - simulácia

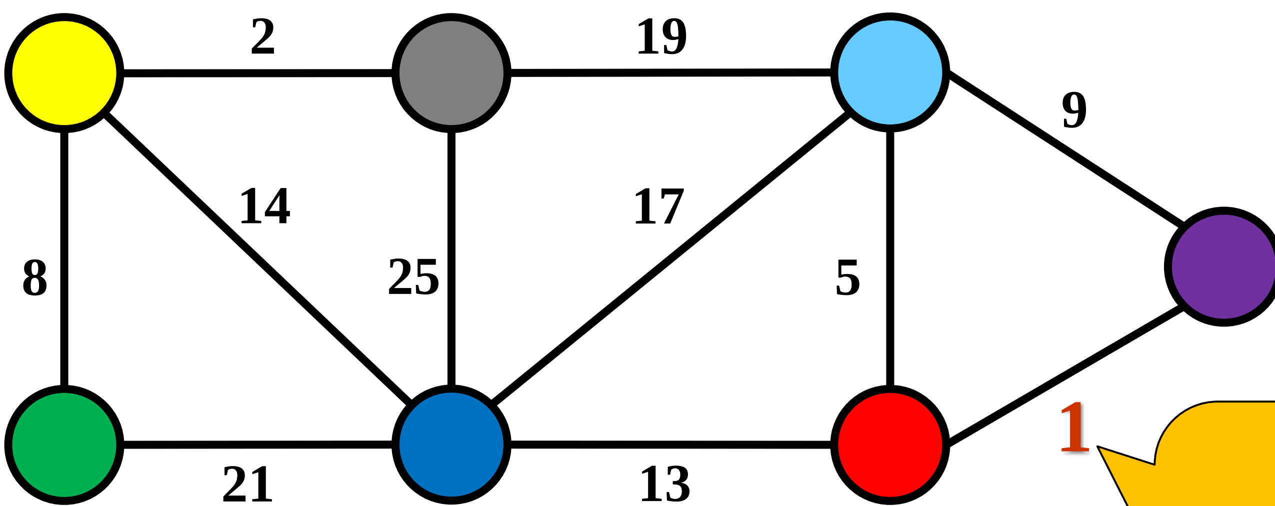


Kruskalov algoritmus - simulácia



Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

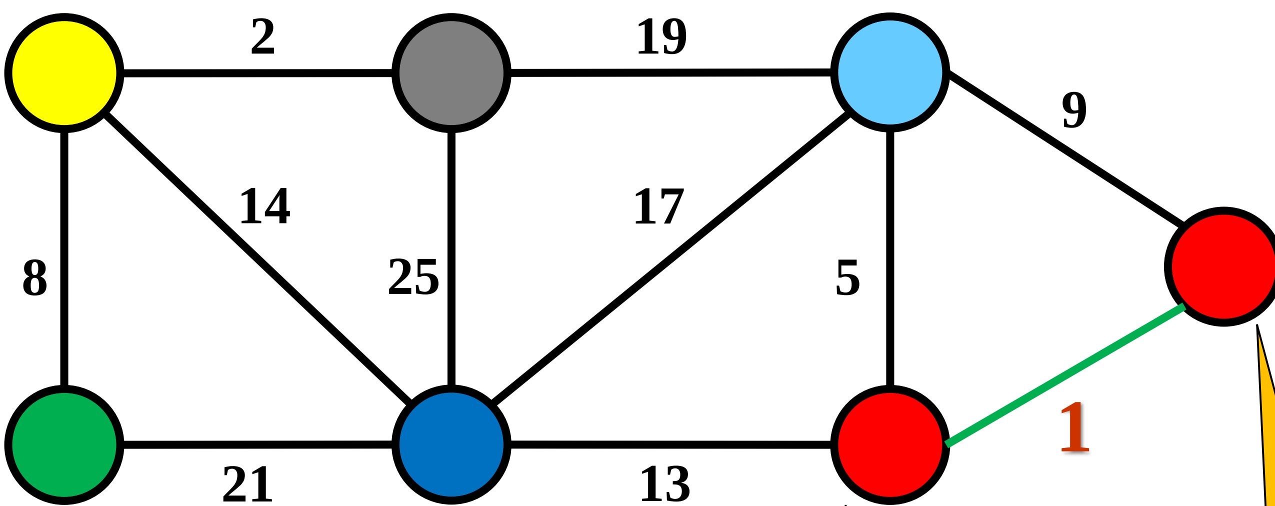
Kruskalov algoritmus - simulácia



hrany sú utriedené podľa ceny a vždy vyberáme najlacnejšiu

Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

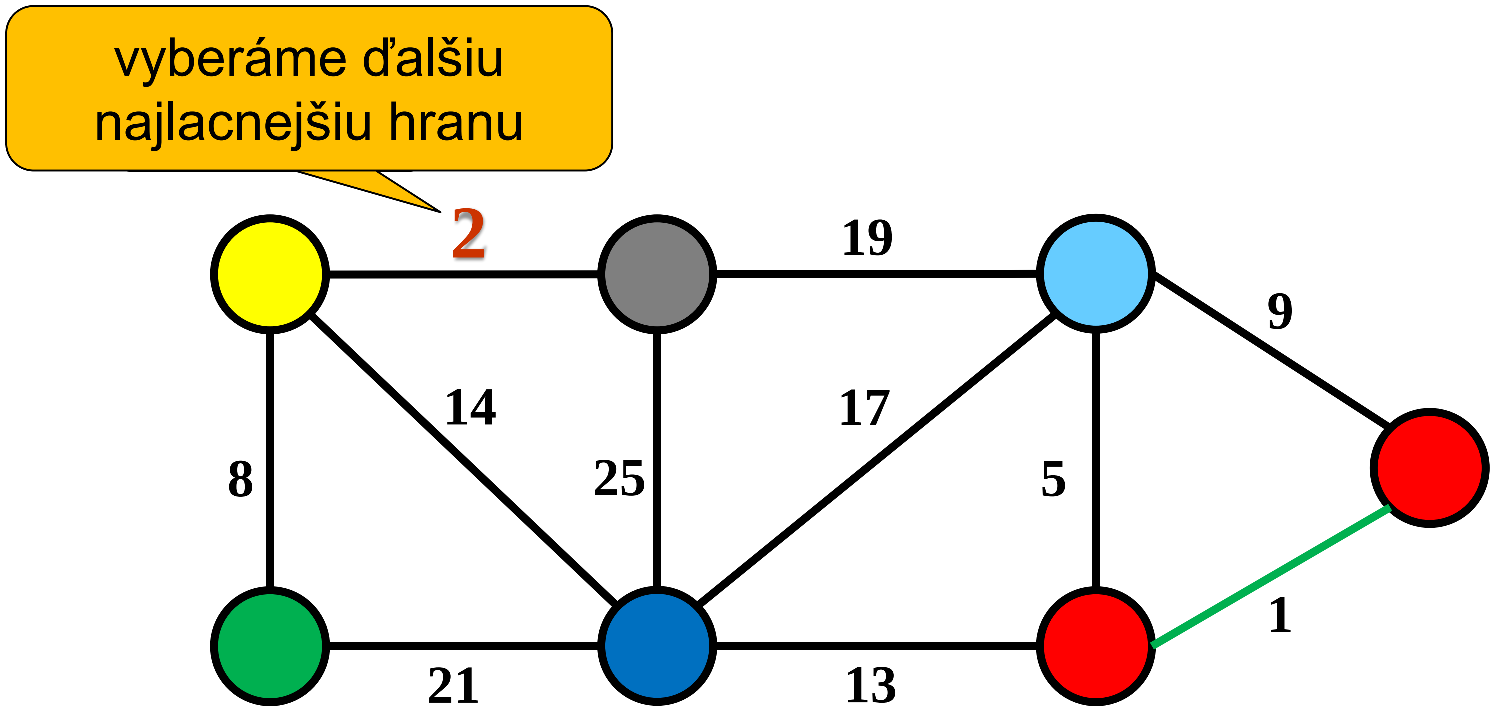
Kruskalov algoritmus - simulácia



Spojíme komponenty = vrcholy dostanú rovnakú farbu, lebo sú v spoločnom strome

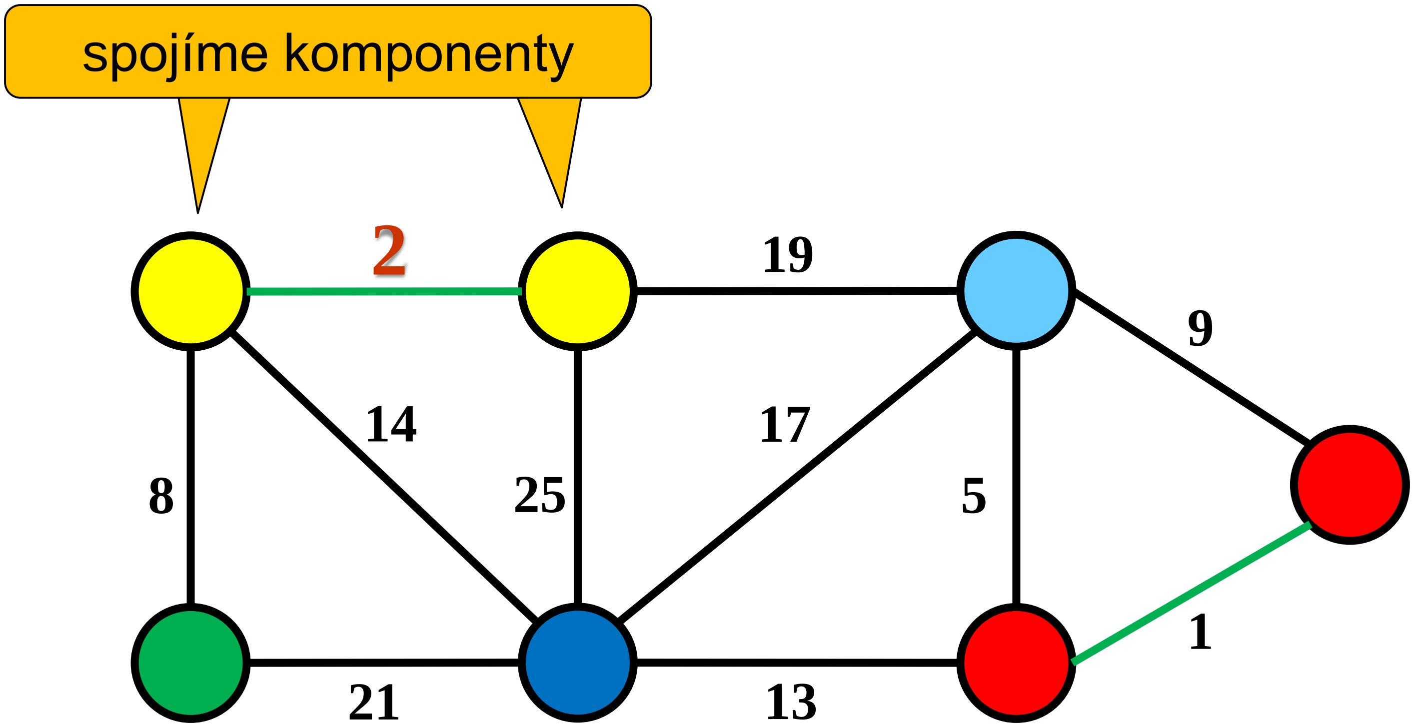
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8

Kruskalov algoritmus - simulácia



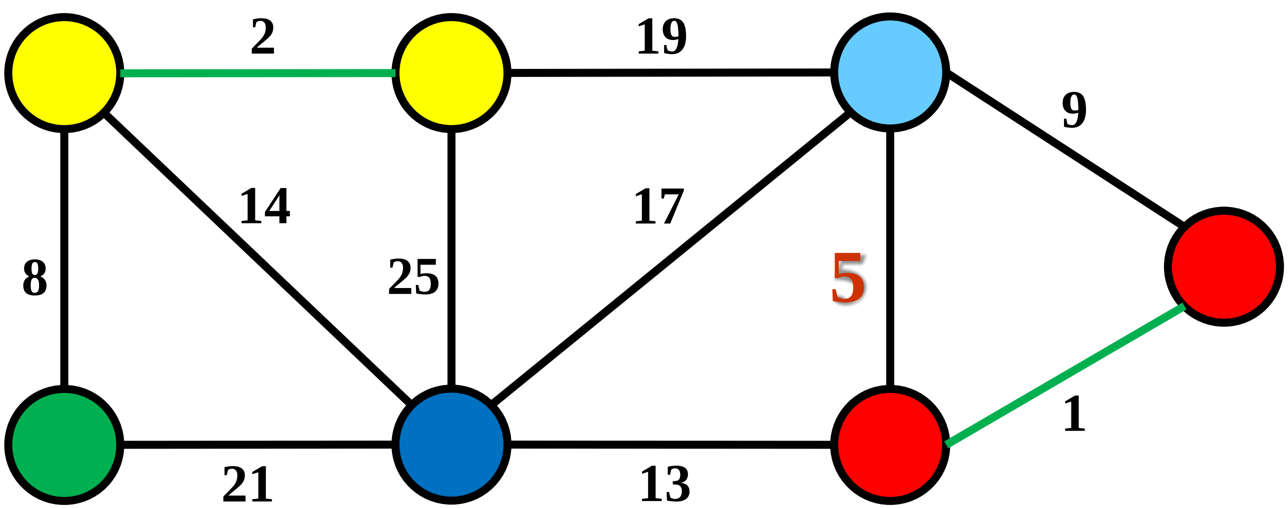
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



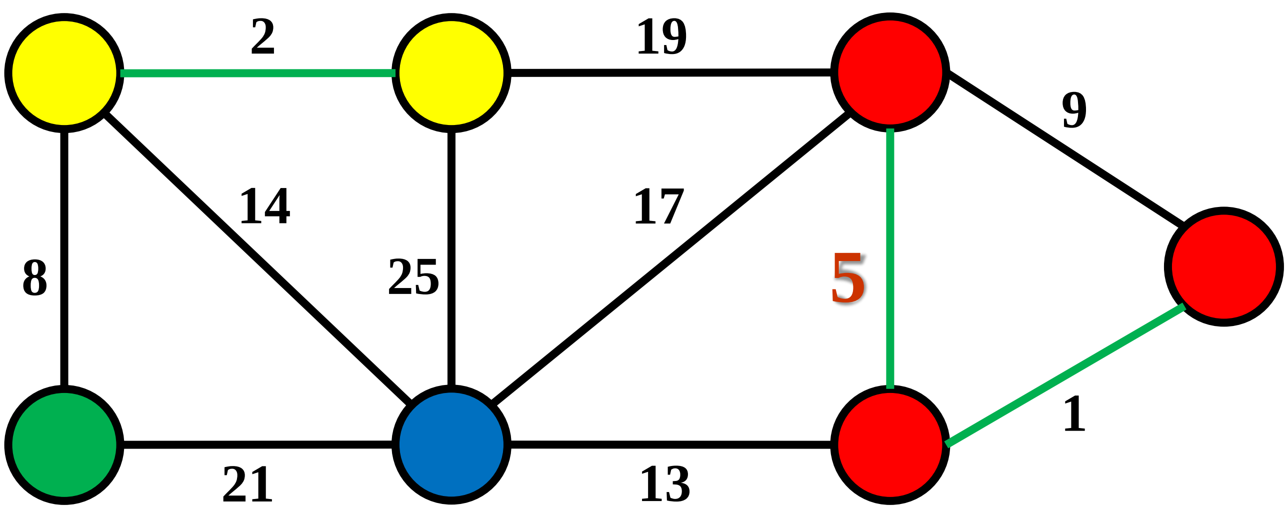
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



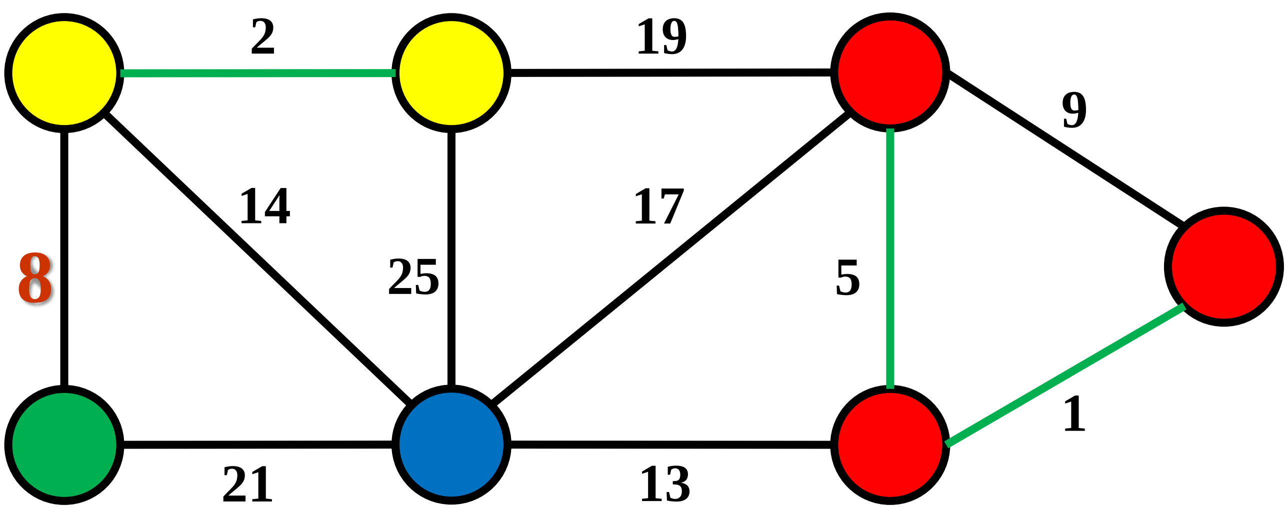
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



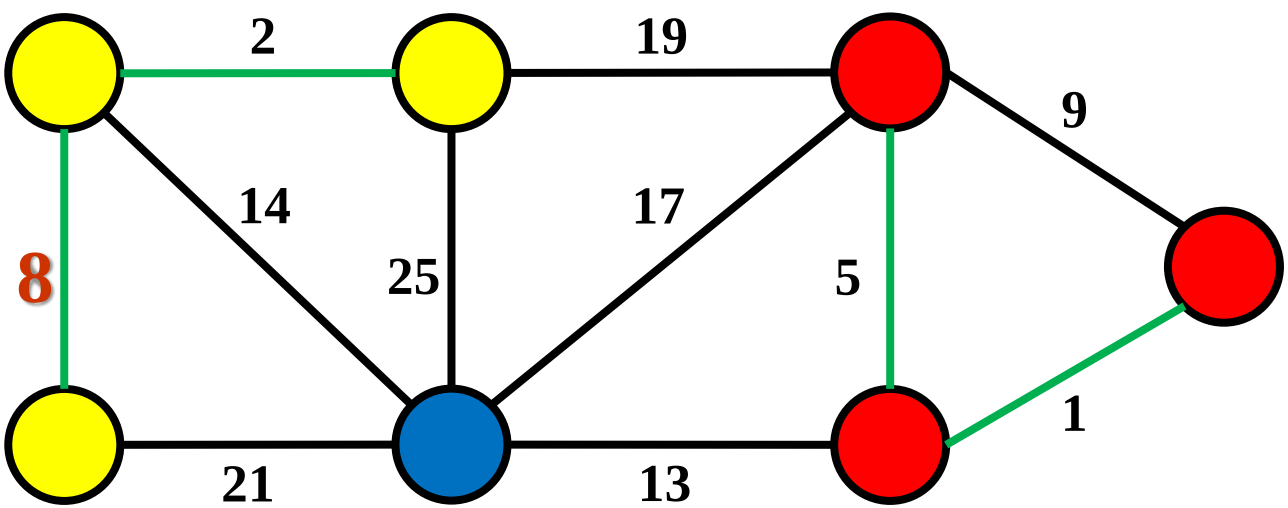
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



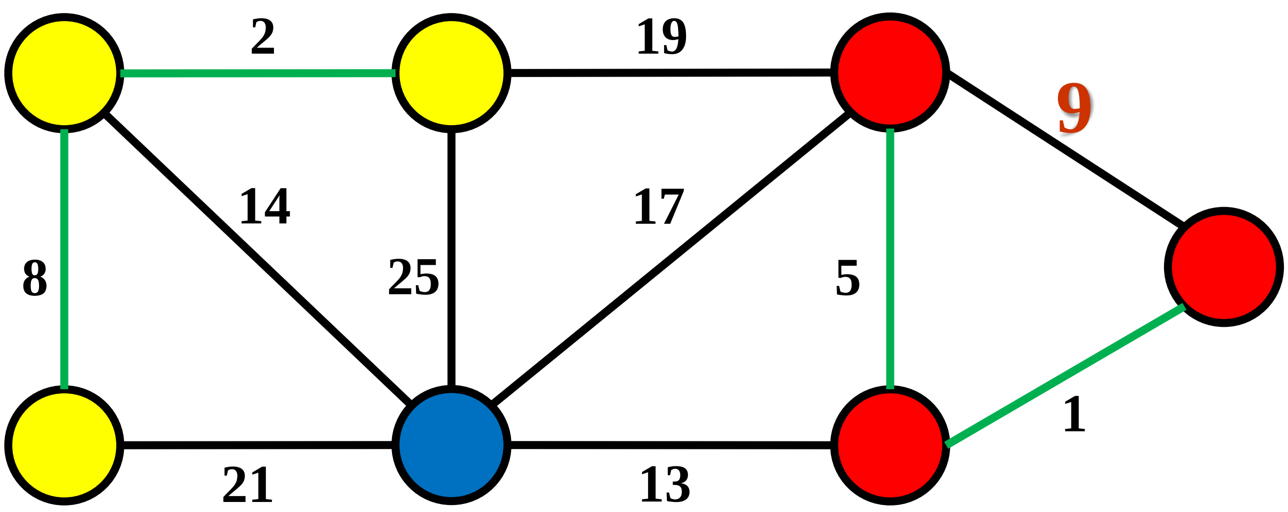
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



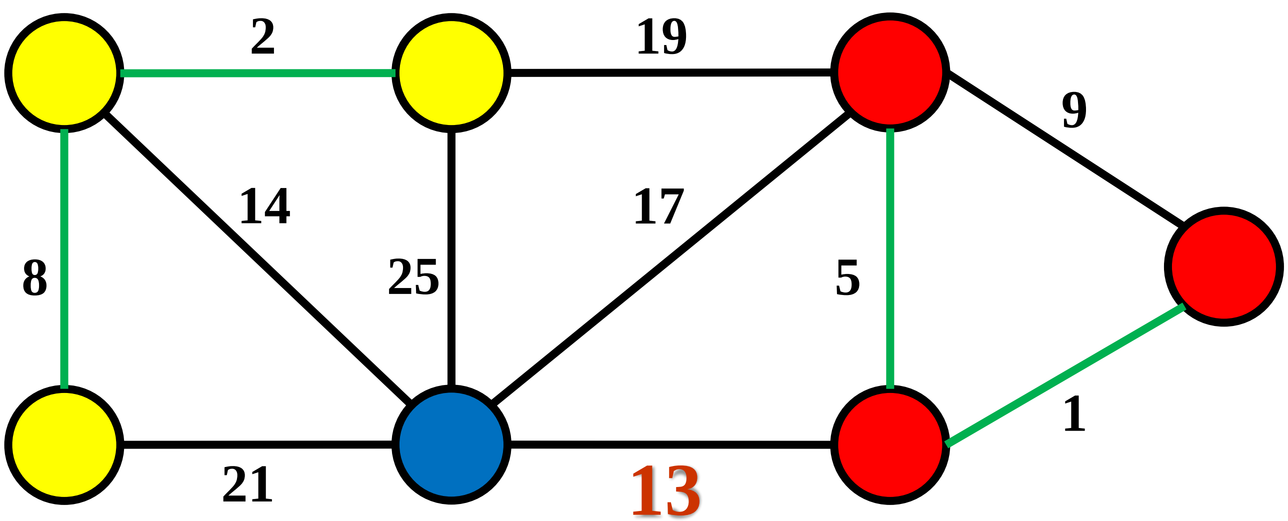
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



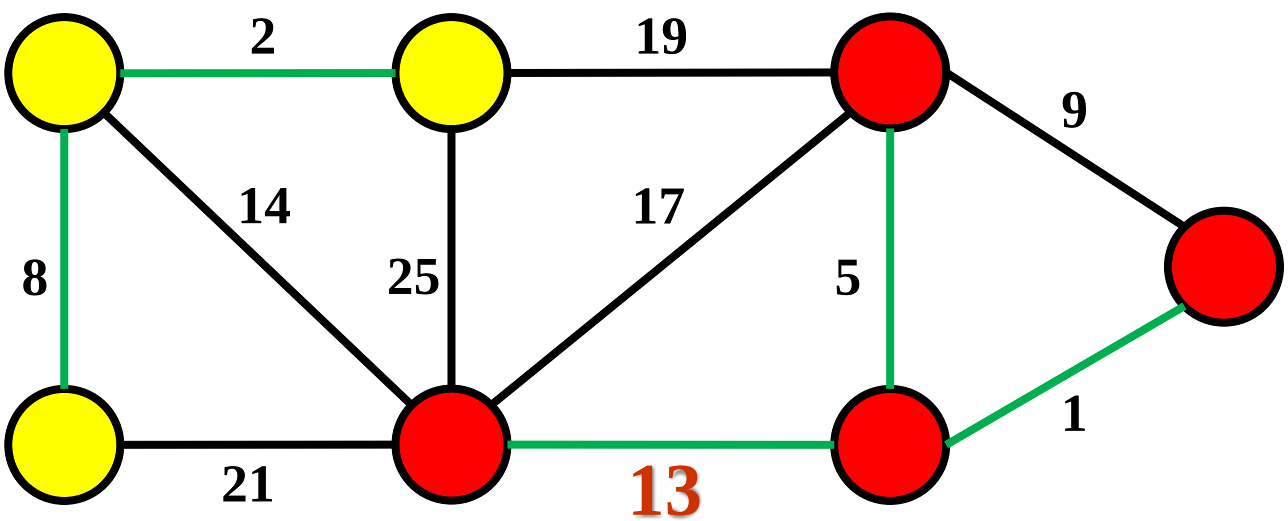
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



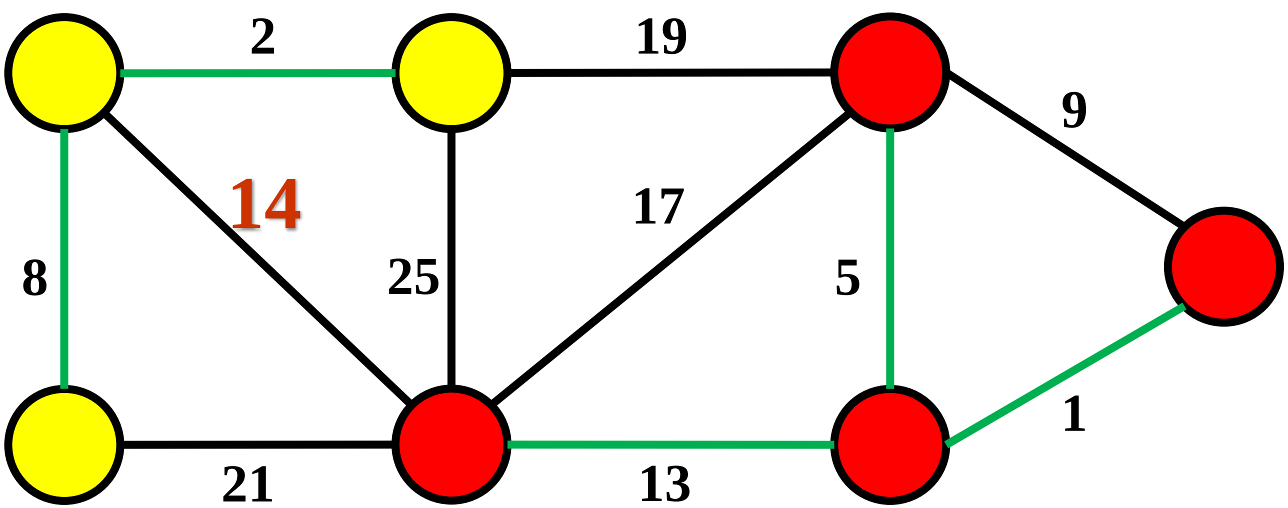
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

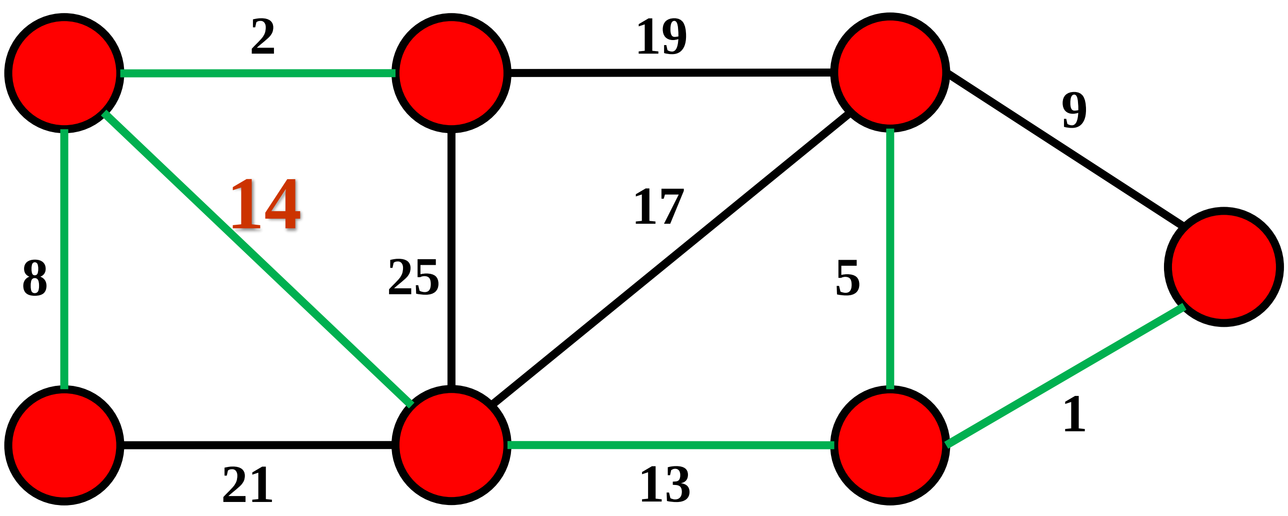
Kruskalov algoritmus - simulácia



Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia

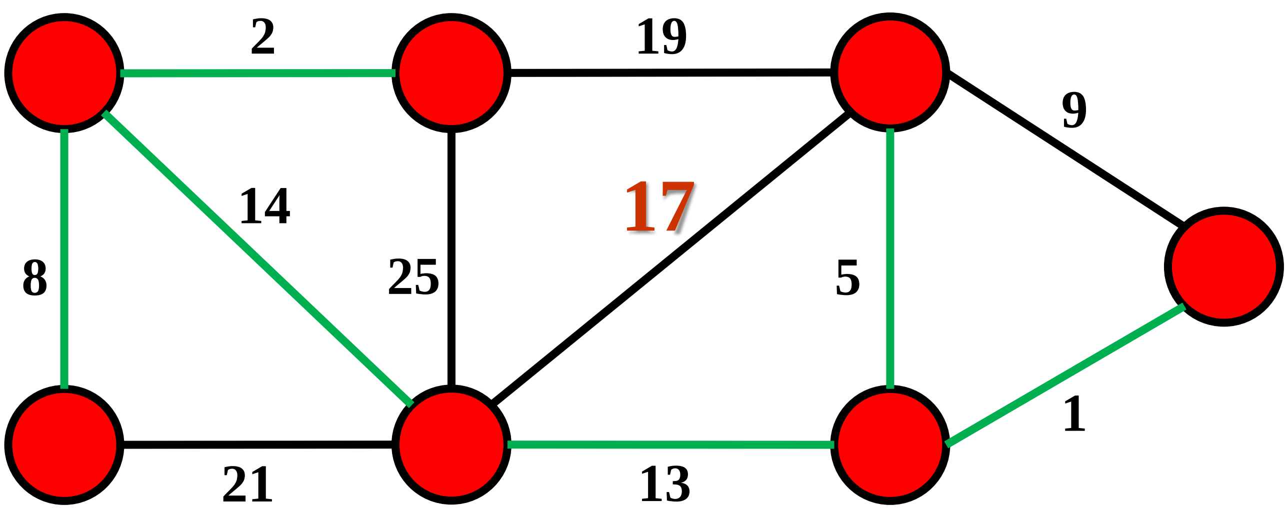
Všetky vrcholy už sú spolu v jednom komponente



Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

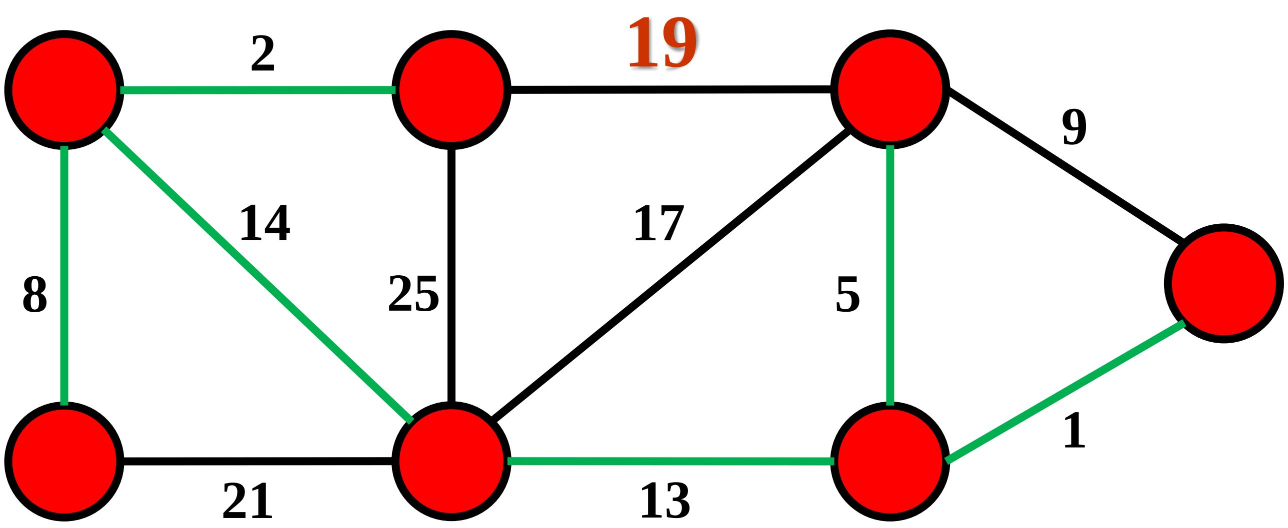
Kruskalov algoritmus - simulácia

žiadnu ďalšiu hranu už nevieme pridať



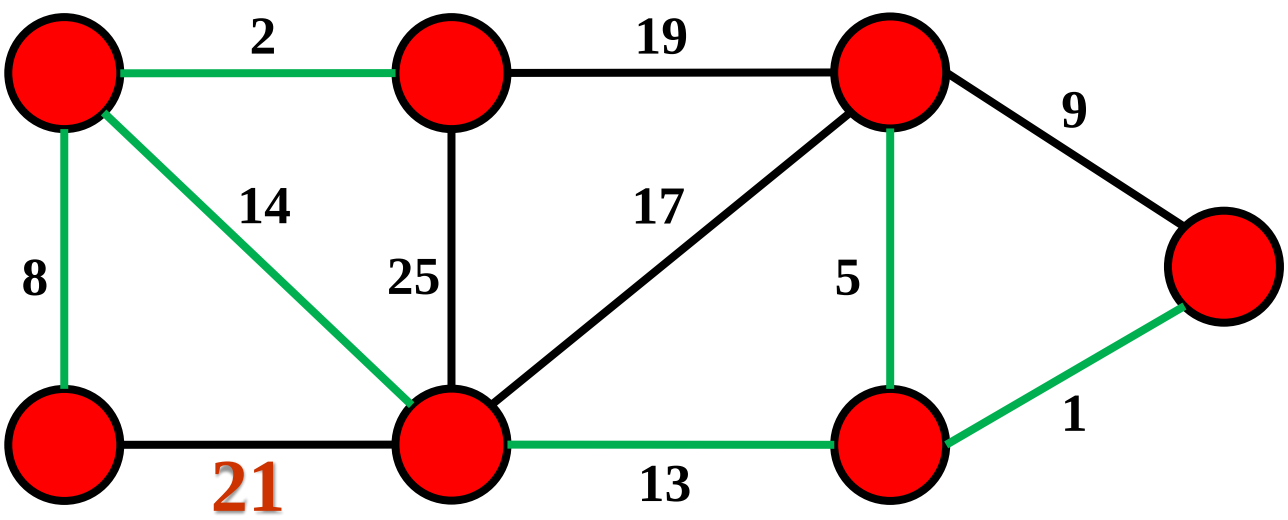
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



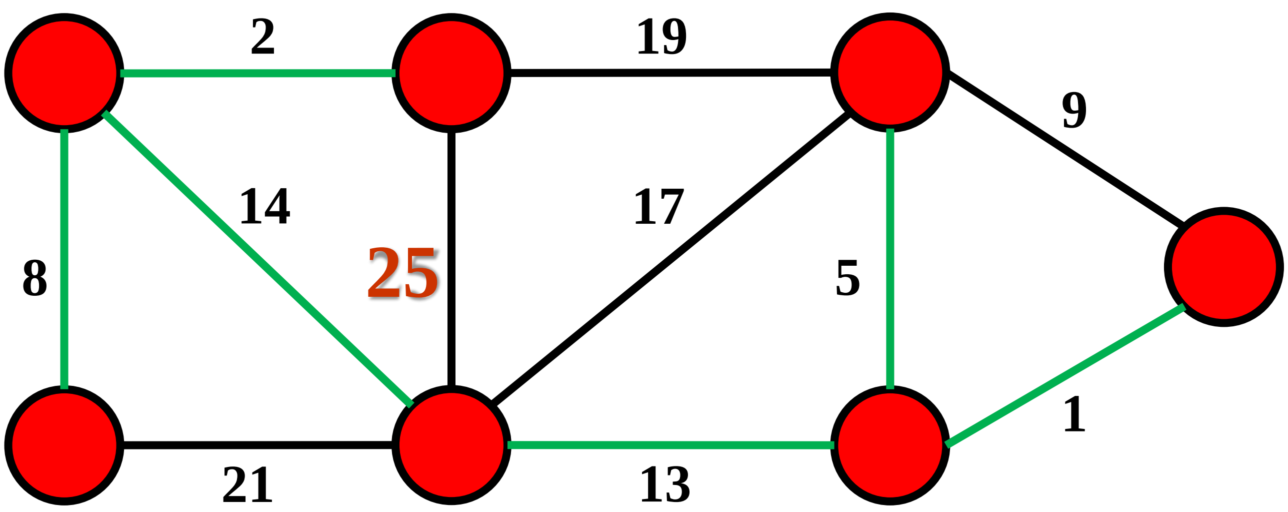
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



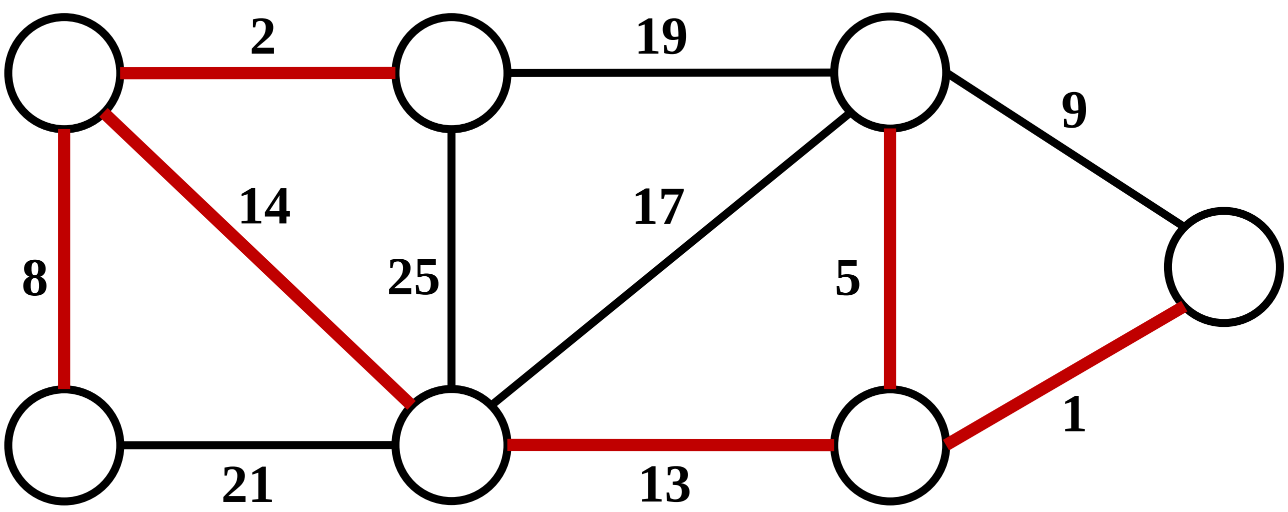
Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



Utriedené hrany: 1, 2, 5, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 21, 25

Kruskalov algoritmus - simulácia



získali sme minimálnu kostru grafu

Kruskalov algoritmus

- V každom kroku môže hrana spoji dva existujúce stromy do jedného stromu

- Je potrebný efektívny spôsob pre určovanie /vyhnutie sa cyklom
- Algoritmus skončí, keď všetky vrcholy sú v jednom strome.

Ak jednovrcholové grafy nepovažujem za stromy

V každom kroku hrana môže:

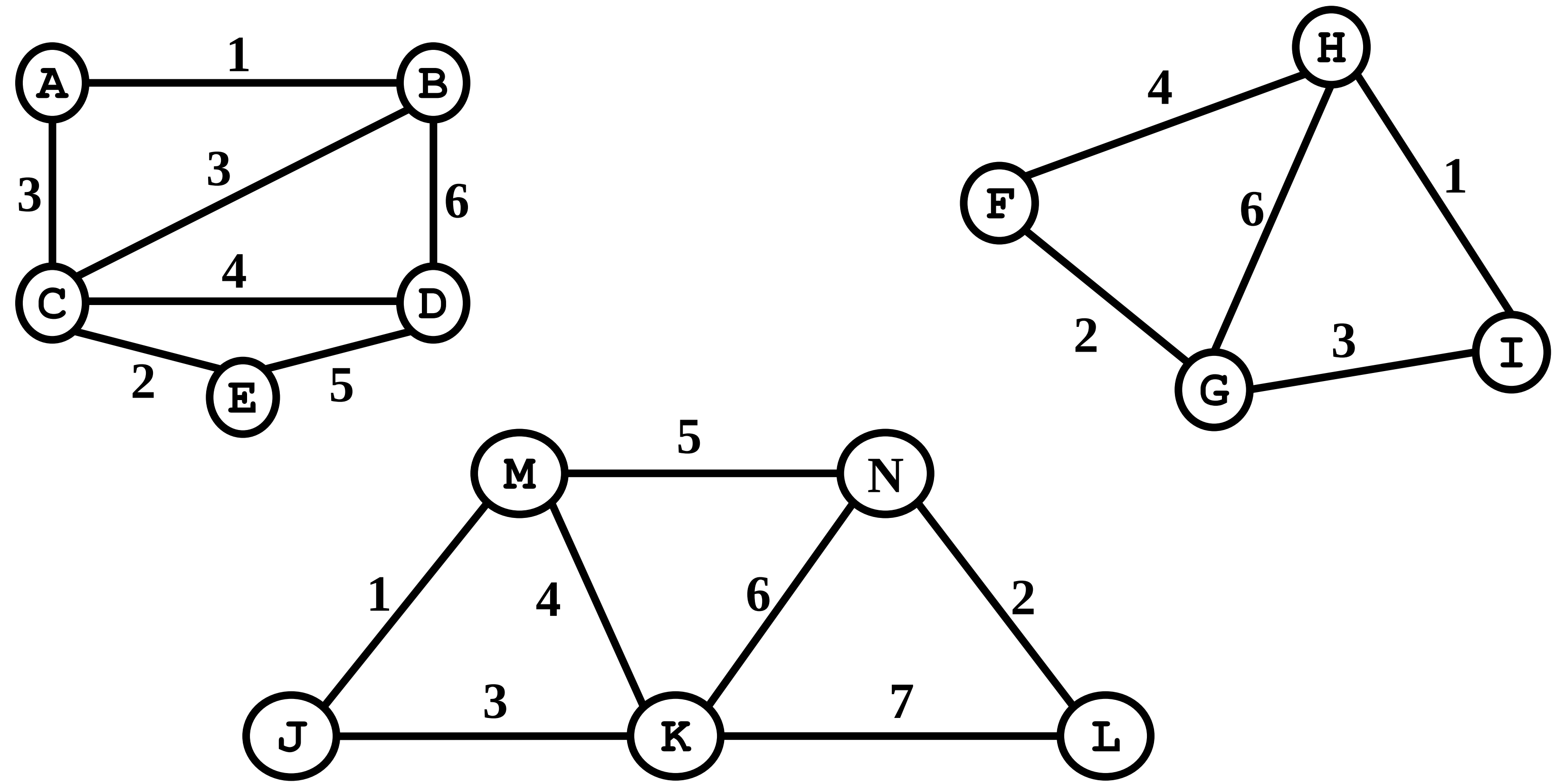
- zväčšiť nejaký existujúci strom
- spojiť dva existujúce stromy do jedného stromu
- vytvoriť nový strom

Kruskalov algoritmus

```
kostra = prázdny zoznam hrán;
zotrieď množinu hrán v grafe podla hodnoty;
priraď vrcholom čísla komponentov od 1 po n;
//kazdy vrchol je na zaciatku vo vlastnom
komponente
for (e: hrany grafu){
    if (začiatok a koniec hrany e
                sú v rôznych komponentoch){
        kostra.pridajHranu(e);
        spoj komponenty začiatku a konca hrany;
    }
}
```

Úloha 4

- Otázka:
  Ktorou hranou začneme Kruskalov algoritmus?



Kruskalov algoritmus - poznámky

- Algoritmus vyzerá jednoduchší ako Dijkstrov-Primov, ale je
  - Ťažšie implementovateľný (kontrola cyklov v grafe)
  - Menej efektívny $\Theta(m \log m)$ – utriedenie hrán
    (počet hrán môže byť až n^2)
  - Implementácia spojenia komponentov ovplyvní zložitosť
- *Kontrola cyklov:*
  cyklus existuje, práve vtedy ak, hrana spája vrcholy v tom istom komponente.

Primov vs. Kruskalov algoritmus

- Časová zložitosť závisí od použitých dátových štruktúr v implementácii.
- V oboch algoritmoch sa kontroluje, či pridanie prvku nevytvorí cyklus, čo je najťažší krok.

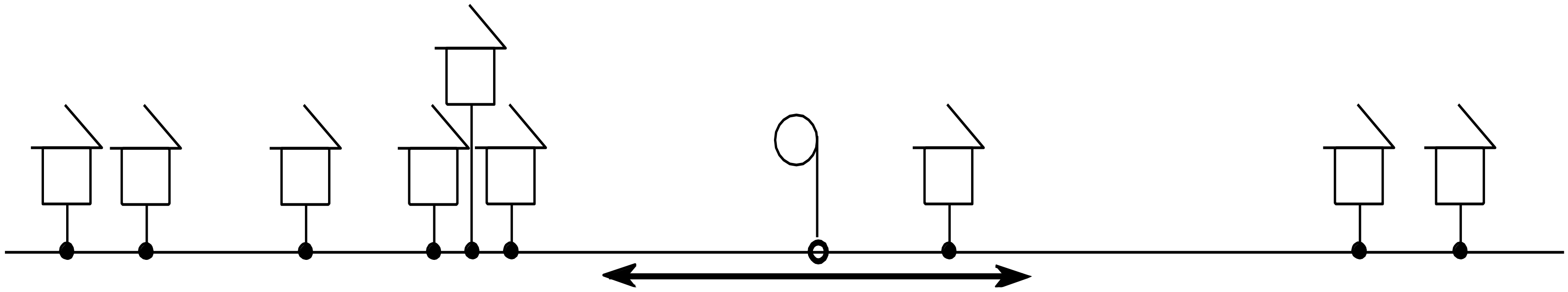
- Ak má graf veľký počet vrcholov,
  tak Primov algoritmus je lepší
- Ak má graf malý počet hrán,
  tak časová zložitosť Kruskalovho algoritmu je lepšia

Úloha o zastávkach autobusu

- V obci Kocurkovo stojí niekoľko domov
  - Všetky stoja pri jedinej rovnej ceste, ktorá cez obec prechádza
  - O každom dome vieme, na koľkom metri cesty od začiatku obce má bránu
- Našou úlohou je rozmiestniť na ceste čo *najmenej* autobusových zastávok tak, aby sme nimi pokryli celú obec
  - musia byť umiestnené tak, aby to nik nemal z domu na zastávku ďalej ako 500 metrov

Úloha o zastávkach autobusu

- V Kocúrkove stoja domy na nasledujúcich súradniciach:
  - 100, 250, 600, 1000, 1100, 1200, 2300, 3300 a 3450 metrov od začiatku obce.
- Nájdite ručne čo najlepšie rozmiestnenie zastávok.
- Situáciu si môžeme znázorniť nasledovne:



Úloha o zastávkach autobusu

- Optimálne riešenie je postaviť štyri zastávky.
- Existuje veľa spôsobov, ako to spraviť
- Napríklad na súradniciach
  300 (prvé tri domy)
  1100 (štvrtý až šiesty dom)
  2800 (siedmy a ôsmy dom)
  3350 (posledný dom)
- Iné, rovnako dobré riešenie, na súradniciach
  600, 1200, 2300 a 3333.

Úloha o zastávkach autobusu

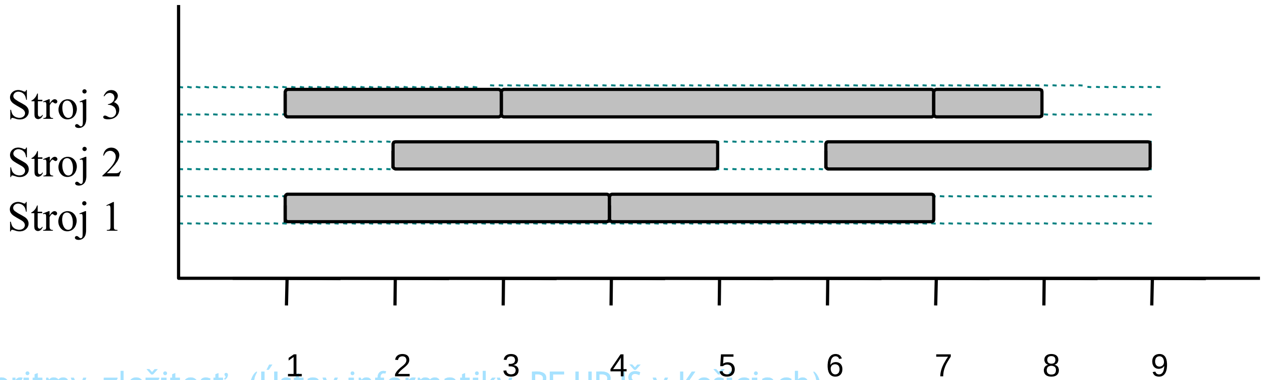
- Ako ale dokázať, že nám na túto obec nestačia tri zastávky?
- Ako sformulovať všeobecný algoritmus, ktorý bude túto úlohu riešiť a vždy nájde optimálne riešenie?

Optimálne riešenie vieme zostrojiť tak, že stále opakujeme nasledujúce kroky:

1. **Nájdeme prvý dom v obci, ktorý ešte pri sebe nemá zastávku.**
2. **Postavíme zastávku 500 metrov zaň.**

Problém rozvrhovania

- Vstup:
  množina ***T*** obsahujúca ***n*** úloh, z ktorých každá má:
  - s_i – čas začiatku
  - f_i - čas dokončenia; $s_i < f_i$
  - $<s_i , f_i>$ - časová perióda
- Problém rozvrhovania:
  Vykonať všetky úlohy s minimálnym počtom strojov.



Problém rozvrhovania

- **Greedy stratégia:**

1. Utriedim úlohy podľa času štartu.

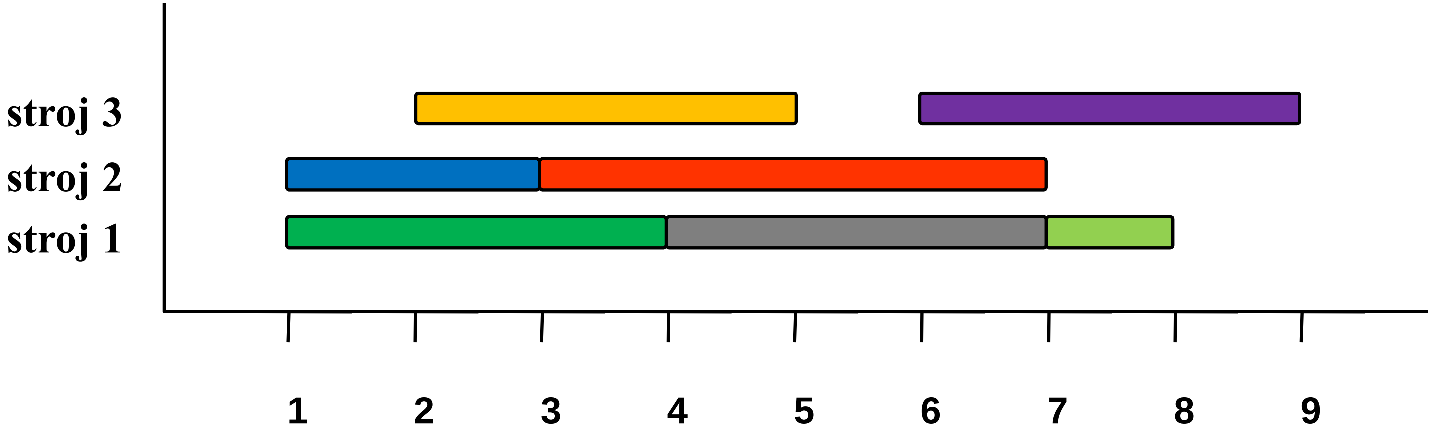
2. Zoberiem prvú úlohu a priradím ju stroju ktorý nič nerobí. Ak taky stroj nemám tak pridám stroj. Úlohu zo zoznamu odstránim.

Zložitosť: **O(n log n)**.

Problém rozvrhovania - príklad

- Vstup:
  množina 7 úloh, ktoré majú časové periódy
  - [1,4], [1,3], [2,5], [3,7], [4,7], [6,9], [7,8]

    (usporiadané podľa začiatku)
- Výstup:
  Minimálny počet strojov, na ktorých je možné vykonať všetky úlohy
- Riešenie:



Problém rozvrhovania

Kým sú nejaké úlohy nepriradené

```
T = množina úloh;
pocetStrojov = 0;
while (!T.isEmpty){
    úloha i = úloha z T, s najmenším s_i;
    if (existuje stroj m pre úlohu i)
          priraď úlohu i stroju m;
    else {
          pocetStrojov++;
          priraď úlohu i stroju pocetStrojov;
    }
    odstráň úlohu i z množiny T;
}
```

Problém rozvrhovania

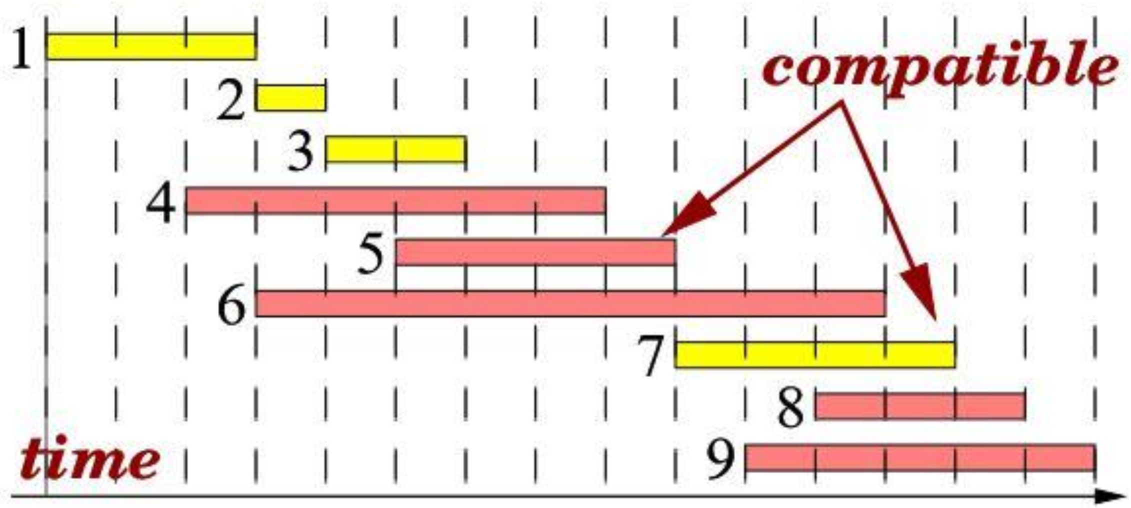
- **Správnosť:**

  Sporom: Predpokladajme, že existuje lepší rozvrh.

  - Predpokladajme, že môžeme použiť *k-1* strojov
  - Algoritmus používa k strojov
  - Nech *i* je prvá úloha na stroji *k*
  - Úloha *i* musí byť v konflikte s inými *k-1* úlohami, pretože používame *k-ty* stroj
  - Teda je *k* navzájom konfliktných strojov
  - Ale to znamená, že sa nedá urobiť nekonfliktný rozvrh na *k-1* strojoch.

Problém výberu úloh

- Vstup:
  Množina úloh.
- Problém výberu úloh:
  Vybrať najväčšiu množinu navzájom kompatibilných úloh.
  - Hovoríme, že dve úlohy *i* a *j* sú kompatibilné, ak ich časové periódy sú disjunktné.



Problém výberu úloh

- **Greedy stratégia:**
  - Najprv utriedime úlohy podľa času <u>ukončenia</u> úlohy od prvej po poslednú.
  - Prechádzame vytvorený zoznam a úlohu pridáme do výberu, ak je kompatibilná s už urobeným výberom.
  - Aká je efektívnosť tohto algoritmu?
    Závisí to od triedenia.

Problém výberu úloh

Optimálnosť algoritmu:

„Greedy“ algoritmus vždy nájde množinu navzájom kompatibilných úloh.

Správnosť algoritmu:

Uvedený „greedy“ algoritmus optimálne rieši problém výberu úloh.

Dôkaz: Indukciou vzhľadom na *n*, počet úloh.

- nech $n = 1$: riešenie je určené jednoznačne a je optimálne.
- nech $n \geq 2$:
  predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky $0 < k < n$
  predpokladajme, že úlohy sú už utriedené podľa koncových časov
- Nech *p* je počet úloh v optimálnom riešení pre $[1,\ldots,n-1]$ a nech *q* je počet úloh pre $[1,\ldots,n]$

Problém výberu úloh

- Platí $p \leq q$.

  Lebo každé optimálne riešenie pre $[1,...,n-1]$
  je aj riešením (nie nutne optimálnym) pre $[1,...,n]$

- Platí nasledujúca nerovnosť $\boldsymbol{p \geq q - 1}$?

  Predpokladajme, že $\underline{p \leq q - 2}$:

  - Nech W je ľubovoľné optimálne riešenie pre $[1,...,n]$
  - Nech $W_0 = W - \{n\}$, ak W obsahuje n a
    $W_0 = W$ inak
  - Potom W_0 neobsahuje n a W_0 je riešením pre $[1,...,n-1]$
  - Toto je <u>spor</u> s predpokladom, že optimálne riešenie pre $[1,...,n-1]$ má p úloh.

Problém výberu úloh

- 1. prípad: Predpokladajme, že $p = q$
  - Potom každé optimálne riešenie pre $[1,\ldots,n-1]$ je optimálne pre $[1,\ldots,n]$
  - Podľa nášho indukčného predpokladu:
    keď $n-1$ je preskúmané, tak je skonštruované optimálne riešenie pre $[1,\ldots,n-1]$
  - Teda, nebude nič pridané; inak by to bolo riešenie veľkosti $> q$
  - Preto algoritmus dá na výstupe riešenie veľkosti p, ktoré je optimálne

Problém výberu úloh

- 2. prípad: Predpokladajme, že $p = q - 1$
  - Potom každé optimálne riešenie pre *[1,...,n]* obsahuje n.
  - Nech k je najväčšie i: $1 \le i \le n - 1$, také, že $f_i \le s_n$.
    Keďže $f_1 \le \cdots \le f_n$ potom
    pre všetky i: $1 \le i \le k$ platí, že i je kompatibilné s n
    a pre všetky i: $k + 1 \le i \le n - 1$ platí, že i je nekompatibilné s n.
  - To znamená, že každé optimálne riešenie pre *[1,...,n]* je zjednotením *{n}* a optimálneho riešenia pre *[1,...,k]*.
    Teda, každé optimálne riešenie pre *[1,...,k]* má p úloh.
    Z toho vyplýva, že žiadne optimálne riešenie pre *[1,...,k]* nie je kompatibilné s ľubovoľným $k + 1,...,n - 1$.

Problém výberu úloh

- Nech W je množina úloh, ktoré algoritmus už má keď skončil k. Podľa našej indukčnej hypotézy, W je optimálne pre $[1,\ldots,k]$. Teda, má p úloh.

- Algoritmus potom nebude pridávať žiadnu úlohu medzi $k + 1$ a $n - 1$ do W, ale pridá n do W Algoritmus dá na výstupe $W \cup \{n\}$. Tento výstup má $q = p + 1$ úloh, a teda je optimálny pre $[1,\ldots,n]$.

Problém plnenia batohu

Knapsack problem

- Zlodej sa vlámal do klenotníctva a chce si naplniť batoh pokladmi (chce ukradnúť čo najviac).
- Vstup:
  Daných je n položiek $S = \{položka_1, položka_2, \ldots, položka_n\}$, z ktorých každá má svoju váhu w_i a profit p_i
- Výstup:
  Ktoré položky by mal zlodej vložiť do svojho batoha, s váhovou kapacitou W, aby dosiahol maximálny profit?

Problém plnenia batohu

- Najjednoduchší prístup by bol vygenerovať všetky možné podmnožiny šperkov a pre každdú vypočítať profit. Potom zobrať podmnožinu s najväčším profitom.
- Toto vyžaduje ? času a nazýva sa ? algoritmus.

Problém plnenia batohu

Greedy stratégia

Príklad 1

Položka	Váha	Profit
w_1	25 kg	10 EUR
w_2	10 kg	9 EUR
w_3	10 kg	9 EUR

W=30

- Ukradne položku s **najväčším profitom**:
- Profit je 10, hoci optimálny profit by mohol byť 18

Problém plnenia batohu

Greedy stratégia

Príklad 2

Položka	Váha	Profit
w_1	5 kg	50 EUR
w_2	10 kg	60 EUR
w_3	20 kg	140 EUR

W=30

- Ukradne položku s **najväčším profitom vzhľadom na jednotku váhy**
- Vyberá v poradí [1, 3, 2]
- Profit je 190, hoci optimálny profit by mohol byť 200

Problém plnenia batohu

Greedy stratégia

- „greedy" prístup ku riešeniu tohto problému je <u>nepoužiteľný</u> na hľadanie optimálneho riešenia

Záver

- Greedy algoritmus je každý algoritmus, ktorý rieši daný problém na základe metaheuristického prístupu, **nájdením najlepšej lokálnej voľby**, pričom dúfame, že sa takto dopracujeme ku globálnemu optimálnemu riešeniu

- Existujú problémy, pre ktoré tento prístup **dáva** skutočne optimálne riešenie

vždy to treba dokázať

- Existujú problémy, pre ktoré tento prístup **nedá** globálny optimálny výsledok (ale niekedy to stačí) ak nie sú otázky...

Ďakujem za pozornosť!