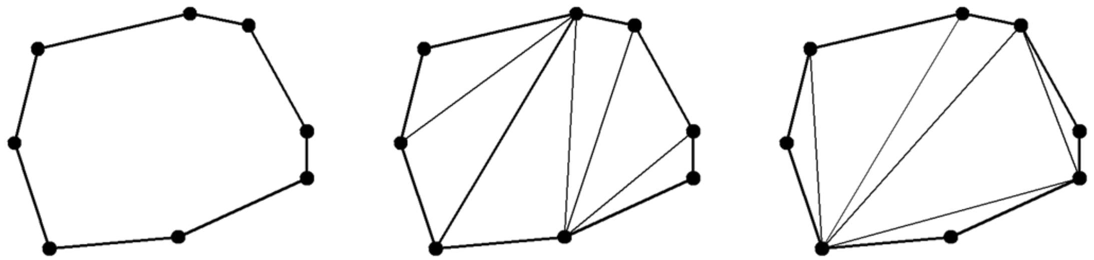


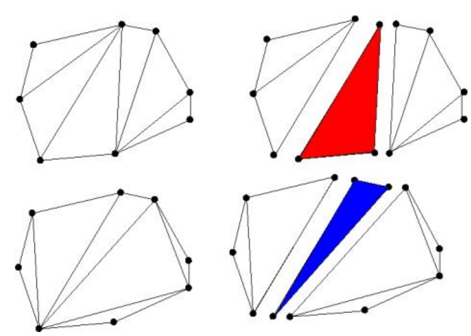
Obrázok 1: Mnohouholník a dve možnosti jeho triangulácie.

Optimálne triangulácie

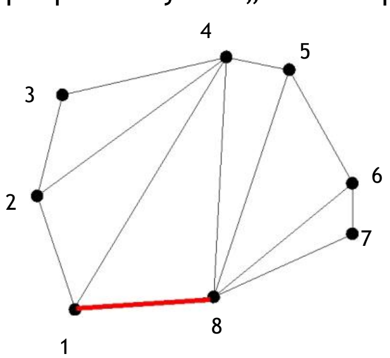
Nech P je zadaný konvexný mnohouholník v rovine. Našim cieľom je nájsť trianguláciu mnohouholníka P s minimálnou dĺžkou. Konkrétne chceme, aby súčet celkovej dĺžky uhlopriečok v triangulácii mnohouholníka P a obvodu mnohouholníka P bol minimálny (viď Obrázok 1).

Definícia: ***Konvexný mnohouholník*** *je mnohouholník, v ktorom sú všetky vnútorné uhly menšie ako* $180°$ *.* ***Uhlopriečka*** *je úsečka, ktorá spája dva nesusedné vrcholy mnohouholníka.* ***Triangulácia*** *je rozdelenie vnútra konvexného mnohouholníka na (vnútorné) disjunktné trojuholníky použitím uhlopriečok.*

Pozorovanie: *Každá triangulácia konvexného mnohouholníka s n vrcholmi sa skladá z práve n-2 trojuholníkov.*



Našim cieľom je nájsť takú trianguláciu P, ktorá má minimálnu dĺžku, t.j. celková dĺžka uhlopriečok použitých v triangulácii je minimálna. Na nájdenie takejto triangulácie použijeme techniku *Rozdeľuj a panuj*. Ako ukazuje obrázok vpravo, v každej triangulácii vieme nájsť taký trojuholník, ktorý rozdelí mnohouholník na dva menšie mnohouholníky. Vzhľadom na to môžeme skúsiť "uhádnuť" tento trojuholník v optimálnej triangulácii a potom rekurzívne nájsť optimálnu trianguláciu vytvorených menších mnohouholníkov. Hlavným problémom je spraviť to tak, aby rekurzívne podproblémy boli „stručne" popísané.



Predpokladajme, že mnohouholník je zadaný ako zoznam vrcholov číslovaných od 1 po n v smere pohybu hodinových ručičiek. Vstupom je tak zoznam vrcholov mnohouholníka a pre každý vrchol sú dané jeho súradnice v rovine. Kľúčové porozorovanie je, že v každej triangulácii P existuje trojuholník, ktorý používa hranu spojujúcu vrcholy 1 a n (červená hrana na obrázku vľavo). Odstránenie tohto trojuholníka obsahujúceho hranu 1-n má za dôsledok, že nám zostanú dva mnohouholníky, v ktorých sú vrcholy číslované postupne rovnako ako v P.

Označme $M[i,j]$ cenu optimálnej triangulácie mnohouholníka, ktorý začína vo vrchole i, končí vo vrchole j a v ktorom každá uhlopriečka prispieva do tejto ceny dvojnásobkom svojej dĺžky a každá hrana na obvode prispieva len svojou dĺžkou. Dostávame nasledovnú rekurenciu:

$$M[i,j] = \begin{cases} 0, & j \leq i \\ 0, & j = i+1 \\ \min_{i<k<j} (\Delta(i,j,k) + M[i,k] + M[k,j]), & inak \end{cases}$$

Výraz $\Delta(i,j,k)$ označuje obvod trojuholníka tvoreného vrcholmi i, j a k. Pripomeňme, že $\Delta(i,j,k) = |ij| + |jk| + |ki|$, kde $|ij| = \sqrt{(x[i] - x[j])^2 + (y[i] - y[j])^2)}$. Na záver poznamenajme, že cena, ktorá nás zaujíma je v $M[1,n]$, keďže táto zodpovedá cene triangulácie P s minimálnou cenou.

Použitím dynamického programovanie dostávame algoritmus na výpočet optimálnej triangulácie v čase $O(n^3)$ s využitím pamäte $O(n^2)$.