7. prednáška (3.4.2012)

Dynamické programovanie

alebo

Bol raz jeden problém...

Čo už vieme

- Asymptotická **časová zložitosť** algoritmov
- Základné **údajové štruktúry**:
  - spájaný zoznam, strom, zásobník, rad
  - možnosti ich efektívnej implementácie
  - príklady ich aplikácie pri riešení rôznych úloh
- **Rekurzia** ako dôležitý programovací koncept na zápis algoritmov
- **Metódy** riešenia problémov (=úloh):
  - rozdeľuj a panuj
  - backtracking

Divide et impera

- **Rozdeľuj a panuj !**
  - armádna, politická a ekonomická stratégia
  - jedna zo základných stratégií riešenia problémov v informatike

- Princíp stratégie:
  - **rozdeliť** problém **na podproblémy**
  - vyriešiť podproblémy
  - ak treba, tak **z riešení podproblémov vytvoriť riešenie** pre pôvodný problém

Rozdeľuj a panuj

- Stratégiu **rozdeľuj a panuj** sme už používali:
  - **QuickSort**
    - pivotizácia **rozdelí problém** (postupnosť) na dva menšie problémy (postupnosti)
    - problémy vyriešime, ich vyriešením máme riešenie pre pôvodný problém
  - **MergeSort**
    - **rozdelíme problém** (postupnosť) na dva menšie podproblémy a vyriešime ich
    - z **riešení podproblémov vytvoríme riešenie** problému pomocou algoritmu na zlúčenie dvoch utriedených (usporiadaných) postupností

Rozdeľuj a panuj

- **Schéma** (ešte raz):
  - rozdeľ problém na menšie (jednoduchšie) podproblémy
  - vyrieš podproblémy
  - z riešení podproblémov vytvor riešenie pre pôvodný problém (skombinovanie riešení)
- **QuickSort**
  - zložité rozdeľovanie, jednoduché kombinovanie riešení
- **MergeSort**
  - jednoduché rozdeľovanie, zložité kombinovanie riešení

Rozdeľuj a panuj

- Ďalšie príklady, ktoré už poznáme:
  - konštrukcia stromu z **inorder** a **preorder** postupnosti
  - konštrukcia stromu zo zátvorkového popisu *((1) 3 (2))*
- Ďalšie úlohy:
  - vyhodnotenie aritmetického výrazu
  - nájdenie mediánu


BANK

Čo robia v banke?

- Banky môžu emitovať **dlhopisy** (cenné papiere)
  - dlhopis má svoju **nominálnu hodnotu** (napr.100 €)
  - každý druh emitovaného dlhopisu musí schváliť CDCP (centrálny depozitár CP) – banka necháva schvaľovať malý počet druhov dlhopisov
- **Príklad:** Banka sa rozhodne emitovať 3 druhy dlhopisov s nominálnymi hodnotami 100 €, 500 €, 800 €, t.j. musí požiadať CDCP o schválenie 3 druhov CP

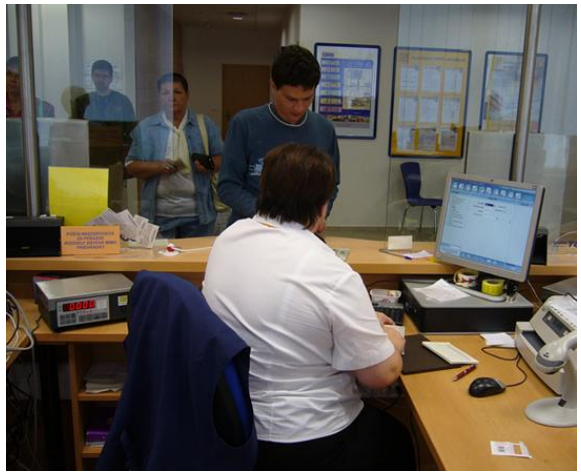
Šetrenie (Ako bojovať s krízou)

- Klient pri kúpe dostane od banky dlhopisy (cenné papiere) na špeciálnom papieri
- Špeciálny papier je **drahý**

- **Problém:**
  - Ak klient chce nakúpiť dlhopisy za 1000€, dlhopisy v akej nominálnej hodnote a v akom počte vydať, aby sa použilo **čo najmenej papiera**? (banka chce **ušetriť**, klient nechce skladovať veľa „papiera“)
  - Je vôbec možné kúpiť dlhopisy v požadovanej hodnote?

Príklad

- Emitované dlhopisy: 100€, 500€, 800€
- Suma: 1300 €
  - **2 x 500€, 3 x 100€** - 5 papierov
  - **1 x 800€, 1 x 500€** - 2 papiere
- Suma: 250 €
  - nemožno kúpiť cenné papiere



Potrebujeme softvér, ktorý nám pre zadanú sumu povie, či ju možno previesť na dlhopisy, a ak áno, tak povie, dlhopisy s akými hodnotami použiť.

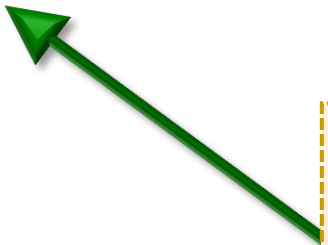
IT oddelenie

„Greedy“ stratégie

- **„greedy“ stratégie** (založené na najlepšom okamžitom rozhodnutí) **nefungujú**:
  - kým sa dá, vyberať papier s najvyššou nominálnou hodnotou
    - emitované papiere: 100€, 500€, 800€
    - 1100€ = 800€ + 100€ + 100€ + 100€
    - 1100€ = 500€ + 500€ + 100€
  - nájsť papier s najvyššou nominálnou hodnotou, ktorá delí požadovanú sumu
    - emitované papiere: 100€, 500€, 800€
    - 1100€ = 11 x 100€

Formalizácia problému

- `n` typov dlhopisov s nominálnymi hodnotami: `h[0], h[1], …, h[n-1]`
- Zovšeobecnené označenie:
  - `R[m]` – minimálny počet dlhopisov potrebných na vyplatenie sumy `m`, *-1* ak také vyplatenie neexistuje



Pre začiatok nám stačí vypočítať, či sumu ide vyplatiť, a ak áno, tak koľko na to treba dlhopisov (cenných papierov).

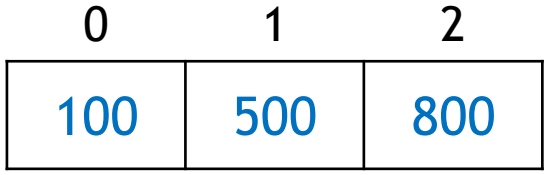
- Okamžité pozorovanie:
  - ak `m = h[i]` pre nejaké *i*, potom `R[m] = 1`

Ako to vyriešiť?

Máme nový výpočtový cluster za pár miliónov, problém je zdá sa tažký, ale bactracking to spraví.

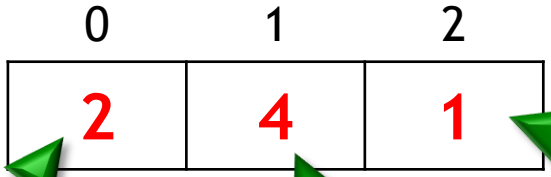
Backtracking

Suma: 3000



Nominálne hodnoty dlhopisov

$$3000 = 2.100 + 4.500 + 1.800$$



Generujeme všetky možné vyplatenia sumy 3000, t.j. koľko akých dlhopisov použiť.

Generujeme čísla: 0..Suma/800

Generujeme čísla: 0..Suma/100

Generujeme čísla: 0..Suma/500

Backtracking – vylepšenia

- Súčet počtu dlhopisov a zostávajúcu sumu vypočítavame priebežne
- Pri generovaní početností jednotlivých typov dlhopisov zohľadňujeme výšku zostávajúcej sumy
- Hodnoty dlhopisov v klesajúcom poradí

Zdá sa, že to funguje!

VIP klient

Nákup dlhopisov za **1 000 000 €**

Kde to zlyhalo?

- Výpočet trvá pridlho pre veľké sumy
- Čas výpočtu zásadne rastie s počtom typov dlhopisov
  - Pri n typoch dlhopisov máme minimálne 2^n rôznych vyplatení

Analýza problému

Čo všetko vieme povedať o probléme, akú má „štruktúru“?

Analýza optimálneho riešenia

Minimálny počet dlhopisov pre sumu 8900

Minimálny počet dlhopisov pre sumu 8400

Pozorovanie

- Nech $d_1 + d_2 + ... + d_k = m$ je také rozdelenie sumy m na k dlhopisov, že k je najmenšie možné a $d_i \in \{h[0], h[1], ..., h[n-1]\}$ pre všetky i.
- Pozorovanie:
  - $d_1 + d_2 + ... + d_{k-1}$ je vyplatenie sumy $m-d_k$ s minimálnym počtom dlhopisov, t.j.

$$R[m] = R[m-d_k]+1$$

- Dôkaz (spor s optimalitou):
  - ak by $m-d_k$ išlo vyplatiť menej než $k-1$ dlhopismi, potom nám stačí k tomuto vyplateniu priložiť dlhopis d_k a máme vyplatenie sumy m menej ako k dlhopismi.

Dôsledok pozorovania

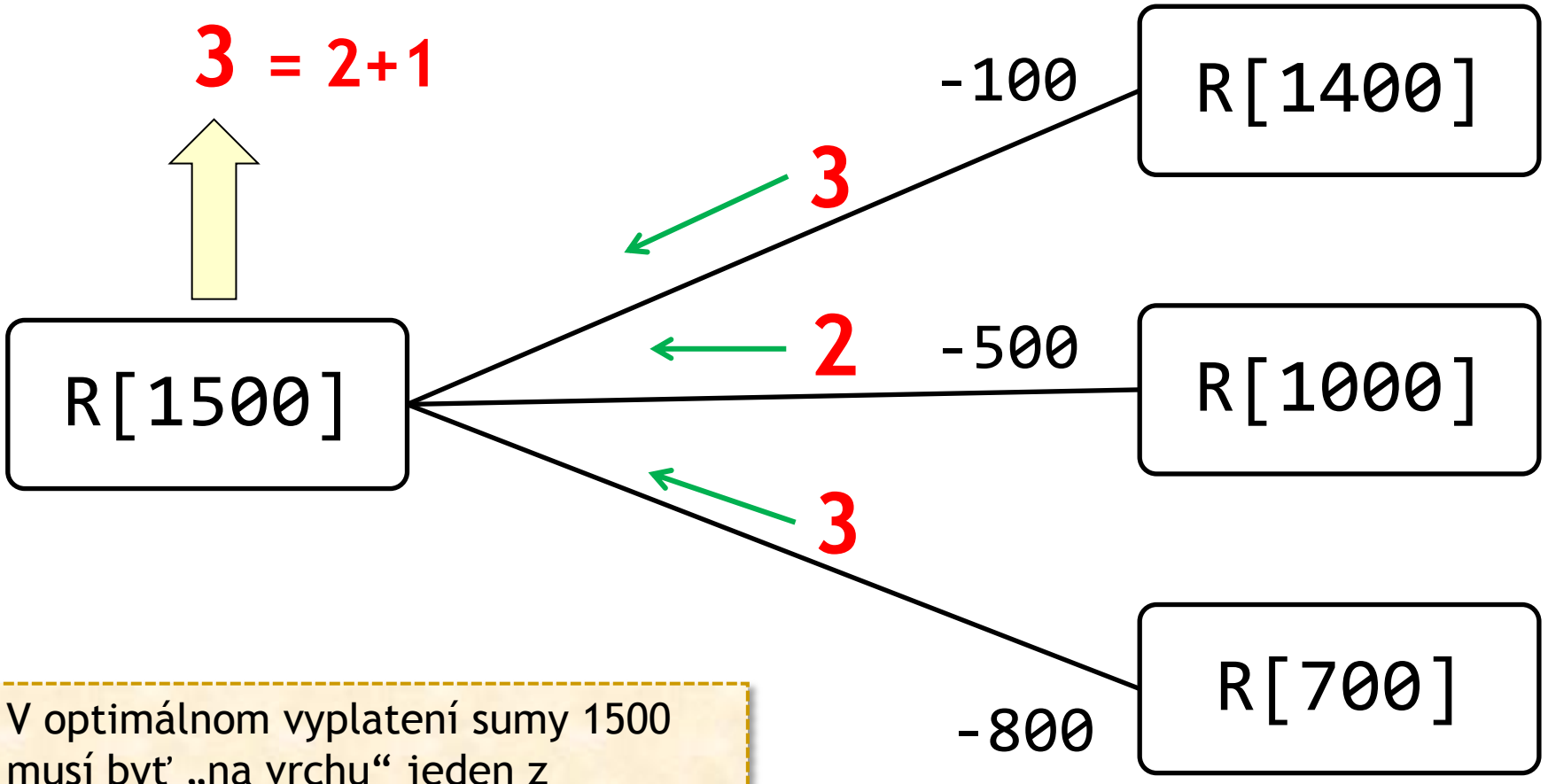
- Na nájdenie optimálneho vyplatenia sumy stačí poznať dlhopis, ktorý bude použitý v optimálnom vyplatení
  - `R[0] = 0`
  - `R[m] = R[m-h[i]]+1`, kde `h[i]` je hodnota dlhopisu, ktorý sa *má použiť pri optimálnom vyplatení* sumy `m`

Algoritmus s „veštcom“

- Algoritmus s „veštcom“:
  - vyber dlhopis **h[i]** z optimálneho vyplatenia sumy **m**
  - nájdi optimálne vyplatenie sumy **m-h[i]** a potom k nemu pridaj dlhopis s hodnotou **h[i]**

- Ako nájsť aspoň jeden dlhopis, ktorý je určite v optimálnom vyplatení sumy **m**?
  - to nevieme...

Optimálne riešenie



V optimálnom vyplatení sumy 1500 musí byť „na vrchu“ jeden z dlhopisov a po jeho odstránení nám ostane optimum pre zvyšnú sumu.

„Magický vzorec“

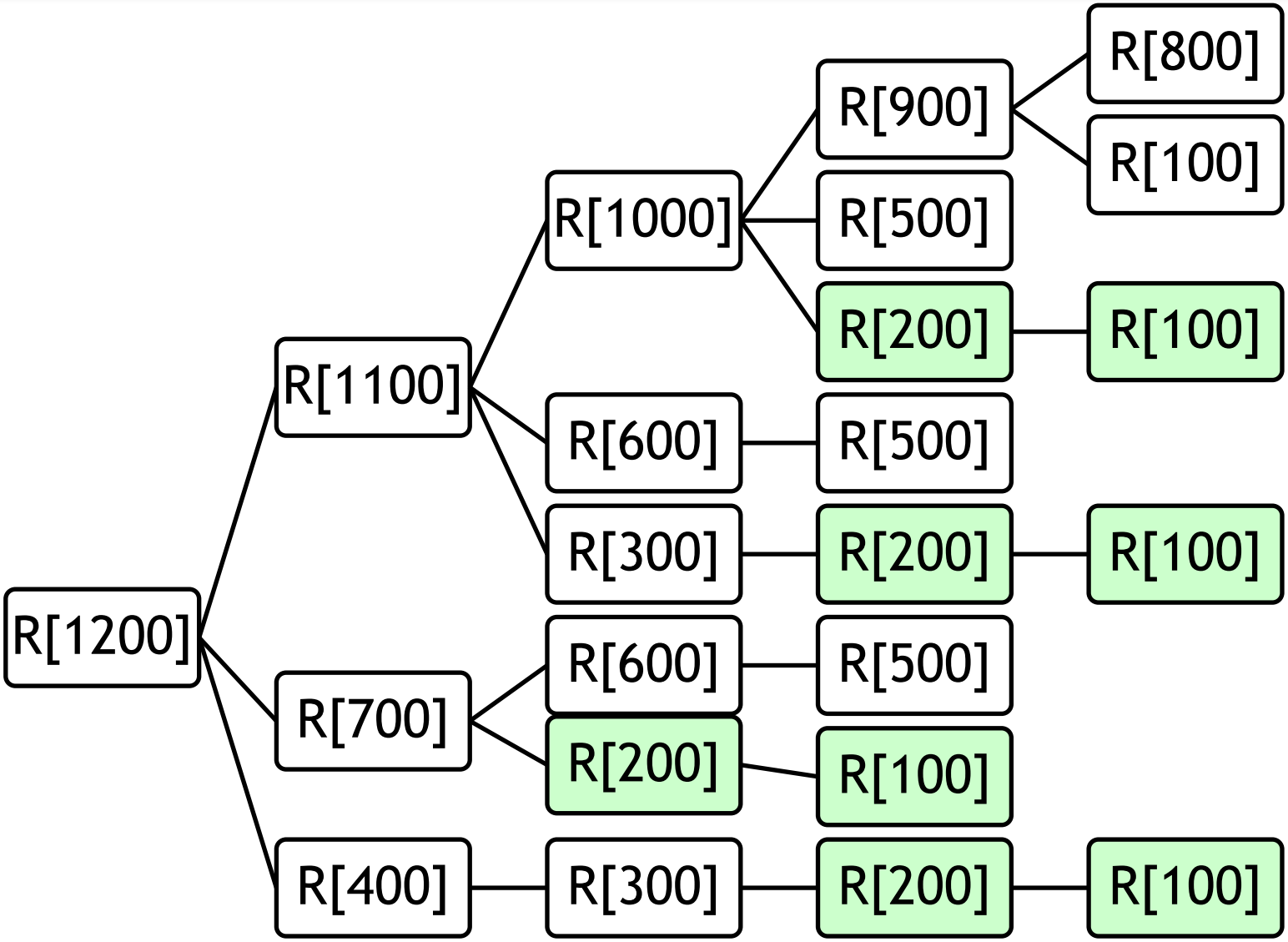
- **Rekurzívny „vzorec“** vyjadrujúci optimálne riešenie na základe optimálnych riešení menších problémov (vyplatenia menších súm)
  - `R[0] = 0`
  - `R[m] = 1 + min {R[m – h[i]]|i = 0..n-1}`
    - ak pre niektoré `i` je `R[m-h[i]]` rôzne od `-1`
  - `R[m] = „nedá sa“ (-1), inak`
- Programujeme (rekurzívne) a testujeme …

Efektívnosť?

- Nájdenie riešenia je **extrémne pomalé** aj pre nízke sumy a malé počty nominálnych hodnôt dlhopisov.
  - Nepraktické riešenie pre prax...

Analyzujme strom volaní a priebeh výpočtu...

Strom volaní



Dá sa s tým niečo spraviť?

- **Pozorovanie:** Zbytočne **opakované výpočty** – ak raz vypočítame, že na sumu 200€ treba 2 cenné papiere, tak to tak bude stále (pri rovnakých nominálnych hodnotách dlhopisov)

Ako zabráňiť
opakovaným výpočtom toho istého?

- Zavedenie „cache“ – po vypočítaní medzivýsledku, si ho **uložíme**, aby sme ho už opäť nemuseli počítať.

Ukladanie medzivýsledkov

- Vytvoríme dostatočne veľké pole a inicializujeme ho na **dohodnutú hodnotu** indikujúcu, že pre danú sumu výsledok ešte nebol vypočítaný.

```
int[] cache = new int[suma+1];
Arrays.fill(cache, Integer.MIN_VALUE);
```

Dohodnutá hodnota = „ešte nemáme vypočítané“

- Zmena v algoritme:
  - prv než začneme počítať, **overíme, či už nemáme výsledok** vypočítaný

```
if (cache[suma] != Integer.MIN_VALUE)
    return cache[suma];
```

Časová zložitosť

- Suma **m**, **n** nominálnych hodnôt dlhopisov:
  - skúmaných je vyplatenie nanajvýš **m** ($O(m)$) rôznych súm
  - na zistenie vyplatenia jednej hodnoty treba čas $O(n)$, ak nezaratávame čas riešenia podproblémov
  - vyplatenie každej sumy je počítané **nanajvýš raz** (vďaka uchovaniu medzivýsledkov)
- Celkový čas: $O(m.n)$
  - „pseudopolynomiálny čas“
- Celková pamäť: $O(m+n)$

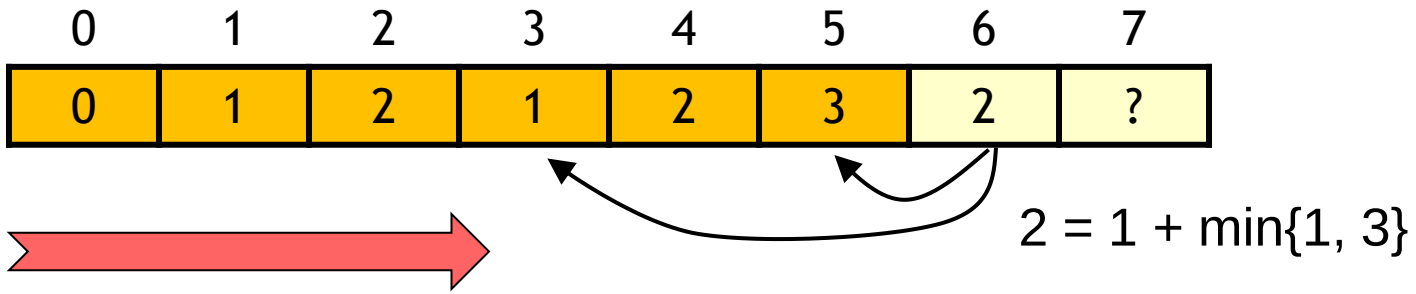
Ako to celé dopadlo?

Prístup zdola-nahor

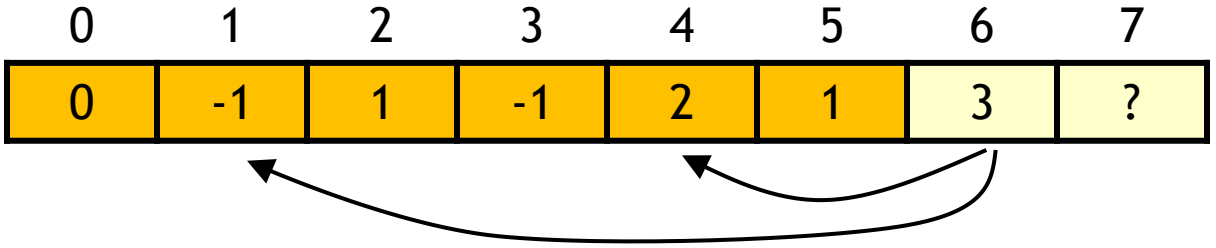
- Ukladanie medzivýsledkov – **memoizácia**
  - prístup **zhora-nadol** (od problému k podproblémom)
- „cache“ pamäť (pole medzivýsledkov) môžeme **systematicky** vyplniť počnúc najmenšími hodnotami
  - prístup **zdola-nahor**:
    - z riešení problémov **budujeme** riešenia väčších problémov
    - **začíname triviálnymi prípadmi**
  - možno vyplníme trochu viac než treba...

Príklad vypĺňania

- Nominálne hodnoty dlhopisov: 1€, 3€



- Nominálne hodnoty dlhopisov: 2€, 5€



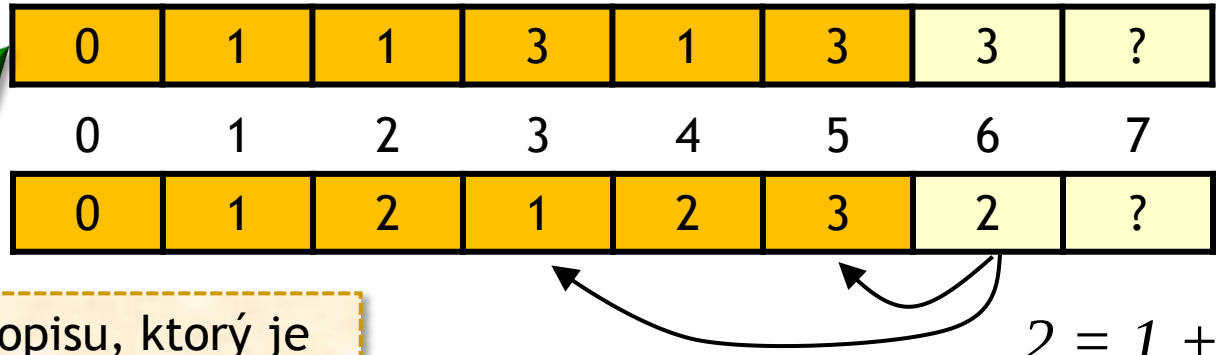
Ako nájsť vyplatenie?

- Algoritmus vypočíta minimálny počet dlhopisov potrebných na vyplatenie sumy (optimálne riešenie), ale nenájde, aké dlhopisy máme použiť

- **Riešenie:**
  - Pre každú sumu si budeme pamätať akým dlhopisom sme našli optimálne vyplatenie danej sumy
  - **Spätným prechodom** zrekonštruujeme optimálne riešenie

Ako nájsť vyplatenie?

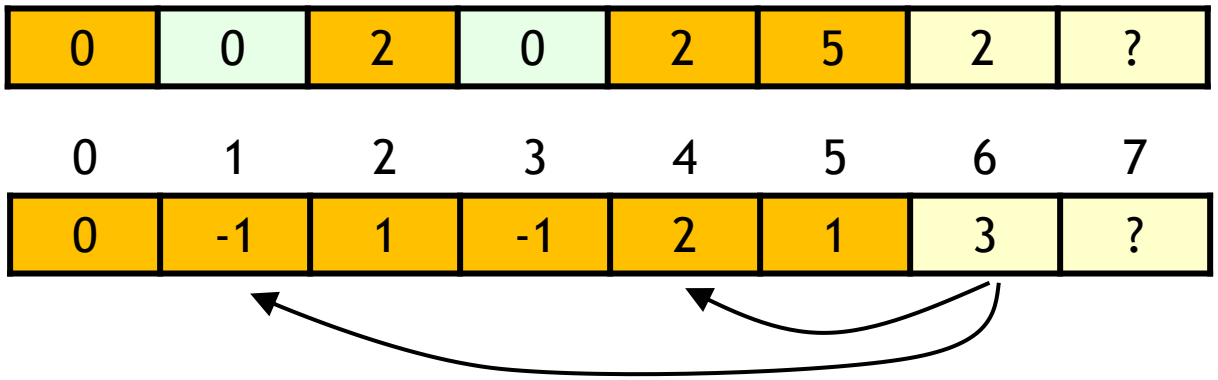
- Nominálne hodnoty dlhopisov: 1€, 3€



$2 = 1 + min\{1, 3\}$

Hodnota dlhopisu, ktorý je v nejakom optimálnom vyplatení danej sumy.

- Nominálne hodnoty dlhopisov: 2€, 5€



Dynamické programovanie

- Formalizácia riešenia, definovanie podproblémov, charakterizovanie štruktúry optimálneho riešenia
- **„Magický vzorec“** na výpočet optimálneho riešenia z optimálnych riešení podproblémov
- Skonštruovanie riešení z riešení podproblémov prístupom **zdola-nahor** („vyplnenie tabuľky“)
- **Nájdenie hodnoty** optimálneho riešenia
- Zrekonštruovanie optimálneho riešenia (spätným prechodom)

Nič nové ...

- Postup, ktorý sme použili pri riešení „bankového problému“ už poznáme:
  - **Fibonacciho čísla** F(n) = F(n-1) + F(n-2) sme riešili aj vyplňaním poľa
  - Fibonacciho čísla ide riešiť aj bez poľa s použitím 3 premenných
    - **Idea:** na vyplnenie políčka poľa nám stačia len dve predchádzajúce hodnoty
    - Podobnú „fintu“ ide často použiť aj pri dynamickom programovaní – v bankovom probléme potrebujeme ***max{h[i]}*** predchádzajúcich políčok

Kedy dynamické programovanie?

- **Optimálna podštruktúra**
  - optimálne riešenie je možné získať z optimálnych riešení podproblémov
- **Prekrývajúce sa podproblémy**
  - celkový počet rôznych podproblémov musí byť relatívne malý
- **Prístup zdola-nahor**
  - od malých problémov k väčším...

ak nie sú otázky...

Ďakujem za pozornosť!

Najdlhšia vybraná rastúca podpostupnosť

Najdlhšia vybraná rastúca podpostupnosť

- Postupnosť n čísel:

5	3	1	4	6	2	8	7

- Ako vybrať čo najviac čísel tak, aby vybrané čísla tvorili **rastúcu podpostupnosť**?

5	3	1	4	6	2	8	7

$3 < 4 < 6 < 8$

- Iné riešenie:

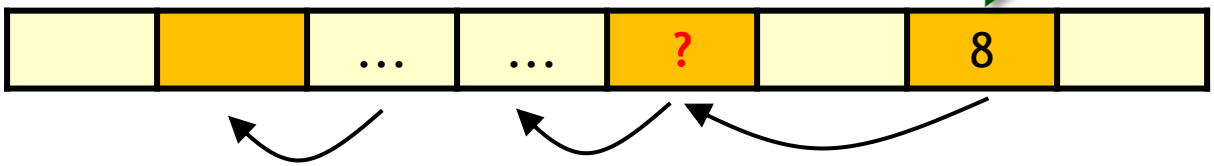
5	3	1	4	6	2	8	7

- *Existuje riešenie, kde vyberieme viac ako 4 čísla?*

Charakterizovanie štruktúry

D[i] – dĺžka **najdlhšej vybranej rastúcej podpostupnosti**, ktorá **končí v i-tom prvku** (a obsahuje ho)

Uvažujme **najdlhšiu vybranú rastúcu podpostupnosť**, ktorá končí vo zvolenom prvku postupnosti (a obsahuje ho)

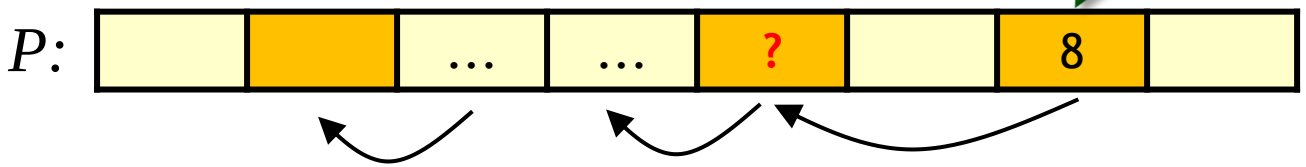


Optimálne riešenie predĺžuje o jeden prvok (8) nejakú **najdlhšiu vybranú rastúcu podpostupnosť**, ktorá končí v nejakom **prvku**, ktorý je **naľavo od 8** a je **menší ako 8**.

„Magický vzorec“

D[i] – dĺžka **najdlhšej vybranej rastúcej podpostupnosti**, ktorá **končí v i-tom prvku** (a obsahuje ho)

Nevieme, ktorú podpostupnosť predĺžujeme, ale určite je to nejaká, ktorá končí v nejakom menšom prvku naľavo...



$$D[i] = 1 + \max\{0, D[j]: 0 \leq j < i \text{ a } P[j] < P[i]\}$$

Skúšame predĺžiť každú **vhodnú** podpostupnosť končiacu **naľavo od P[i]** a vyberieme **maximum**.

Zdola-nahor

$$D[i] = 1 + \max\{0, D[j]: 0 \leq j < i \text{ a } P[j] < P[i]\}$$

Na určenie **D[i]** treba mať vypočítané **D[j]** pre **j < i**. Preto D budeme počítať postupne D[0], D[1], D[2], ...

```
int[] d = new int[p.length];

for (int i = 0; i < p.length; i++) {
    d[i] = 1;
    for (int j = 0; j < i; j++)
        if (p[j] < p[i])
            d[i] = Math.max(d[i], d[j] + 1);
}
```

Hodnota optimálneho riešenia

- Nevieme, v ktorom prvku postupnosti končí **globálne najdlhšia vybraná rastúca podpostupnosť**...
- Vyberieme tú najdlhšiu:

```
int najdlhsia = 0;
for (int i=0; i<d.length; i++)
   najdlhsia = Math.max(najdlhsia, d[i]);
```

Ako rýchlo zrekonštruovať optimálne riešenie? Akú pomocnú informáciu potrebujeme uchovať pri výpočte poľa d?

Najdlhšia spoločná podpostupnosť

LCS

- **LCS (Longest common subsequence)** – najdlhšia spoločná podpostupnosť
  - 2 postupnosti (môžu byť aj rôznej dĺžky)
  - hľadáme najdlhšiu spoločnú podpostupnosť

- Použitie: hľadanie rozdielov v textoch (v Linuxe príkaz **diff**), hľadanie génových mutácií

Formalizácia, podproblém

- Postupnosti (pozor, indexujeme od 1):
  - $a_1, a_2, \ldots, a_n$
  - $b_1, b_2, \ldots, b_m$
- Podproblém:
  - **LCS(i, j)** – dĺžka najdlhšej spoločnej podpostupnosti z postupností $a_1, a_2, \ldots, a_i$ a $b_1, b_2, \ldots, b_j$
- Náš cieľ: **LCS(n, m)**
- Triviálne fakty: *LCS(0, ?) = 0, LCS(?, 0) = 0*

„Magický vzorec“ pre LCS

- Zoberme si nejaké optimálne riešenie pre LCS(i, j), potom platí jedno z nasledujúceho:
  - a_i je v optimálnom riešení a b_j nie je
    - LCS(i, j) = LCS(i, j-1)
  - a_i nie je v optimálnom riešení a b_j je
    - LCS(i, j) = LCS(i-1, j)
  - ani a_i a ani b_j nie sú v optimálnom riešení
    - LCS(i, j) = LCS(i-1, j-1) a a_i!=b_j
  - a_i aj b_j sú v optimálnom riešení
    - LCS(i, j) = 1 + LCS(i-1, j-1) a a_i=b_j

Ide ukázať sporom

„Magický vzorec“ pre LCS

- Ak $a_i=b_j$, potom **LCS(i, j) = 1 + LCS(i-1, j-1)**
  - Ak a_i a b_j sú v nejakej optimálnej podpostupnosti, potom nie je čo riešiť a *LCS(i, j) = 1 + LCS(i-1, j-1)*
  - Ak len jedno z a_i a b_j nie je v optimálnej postupnosti, tak existuje optimálna postupnosť, kde sú obe (prečo?)
  - Ak a_i a b_j nie sú spoločne v nejakej optimálnej podpostupnosti, potom ich môžeme pridať na koniec nejakej optimálnej podpostupnosti, čím ju predlžíme (spor s optimalitou)
- Ak $a_i!=b_j$, potom **LCS(i-1, j-1) <= LCS(i, j-1)** a **LCS(i-1, j-1) <= LCS(i-1, j) <= LCS(i-1, j-1)+1**

„Magický vzorec“ pre LCS

- LCS(0, j) = 0
- LCS(i, 0) = 0
- Ak $a_i = b_j$, potom
  - LCS(i, j) = 1 + LCS(i-1, j-1)
- Ak $a_i \neq b_j$, potom
  - LCS(i, j) = max{LCS(i-1, j), LCS(i, j-1)}

Algoritmus

```
public static int vypocitajLCS(String s1, String s2) {
   int[][] lcs = new int[s1.length()+1][s2.length()+1];
   for (int i = 1; i < s1.length()+1; i++)
      for (int j = 1; j < s2.length()+1; j++)
         if (s1.charAt(i-1) == s2.charAt(j-1))
            lcs[i][j] = 1 + lcs[i-1][j-1];
         else
            lcs[i][j] = Math.max(lcs[i-1][j], lcs[i][j-1]);

    return lcs[s1.length()][s2.length()];
}
```

Časová zložitosť: $O(m.n)$
Pamäťová zložitosť: $O(m.n)$

Príklad tabuľky

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Spätným prechodom a poznačením si, ako sa dosiahlo optimum, vieme zrekonštruovať LCS