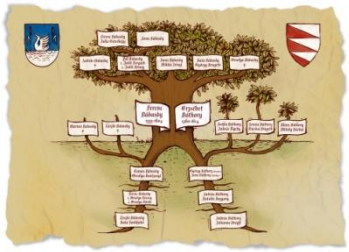
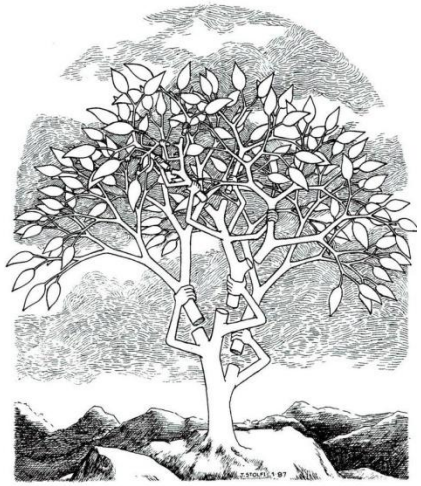
4. prednáška (6.3.2012)



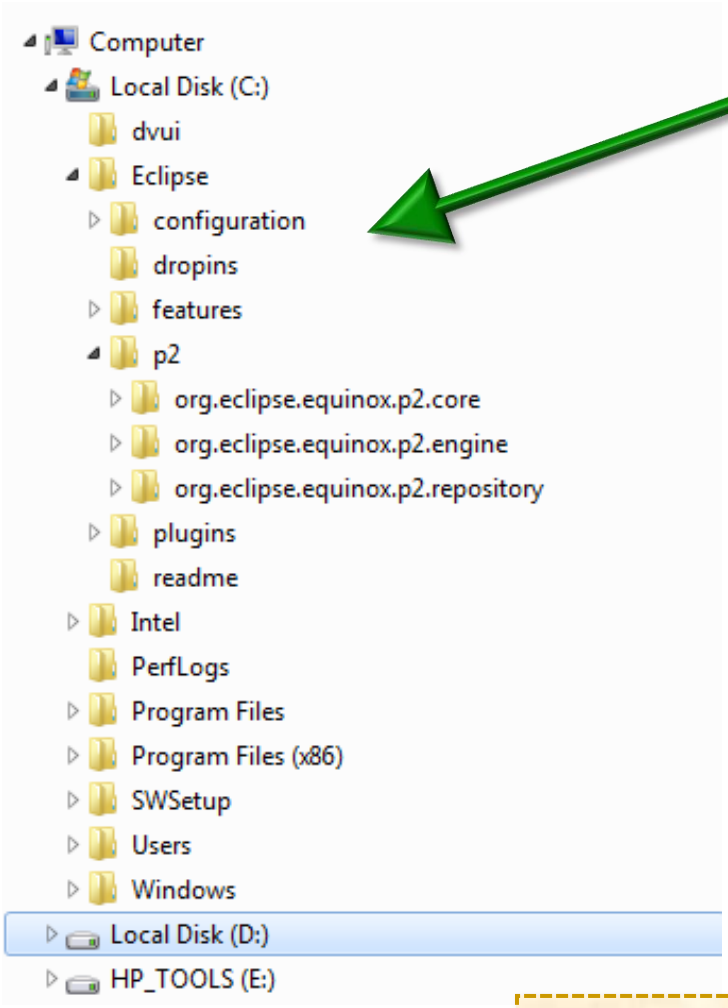
Stromy

alebo

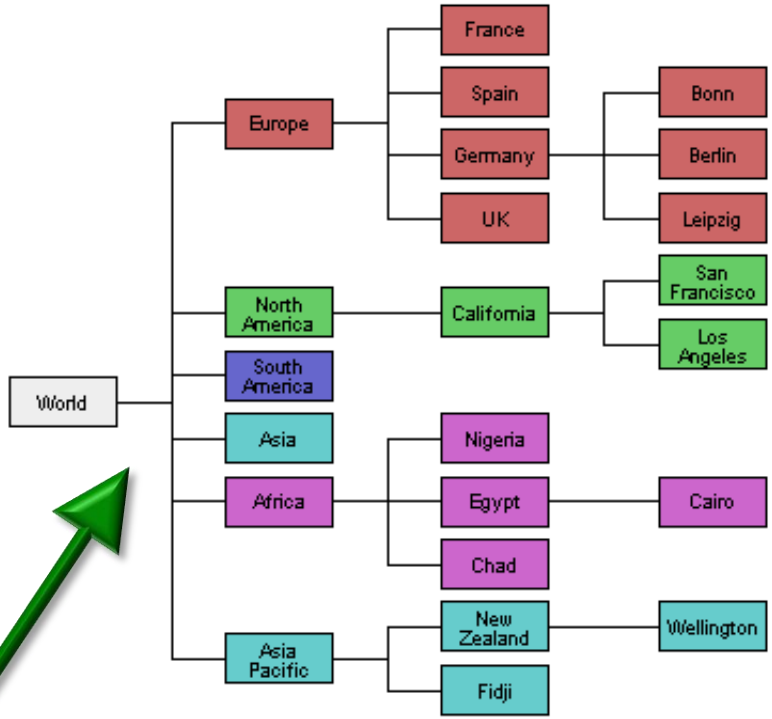
rodostromy a tajomstvá TreeSet-u



Hierarchie okolo nás

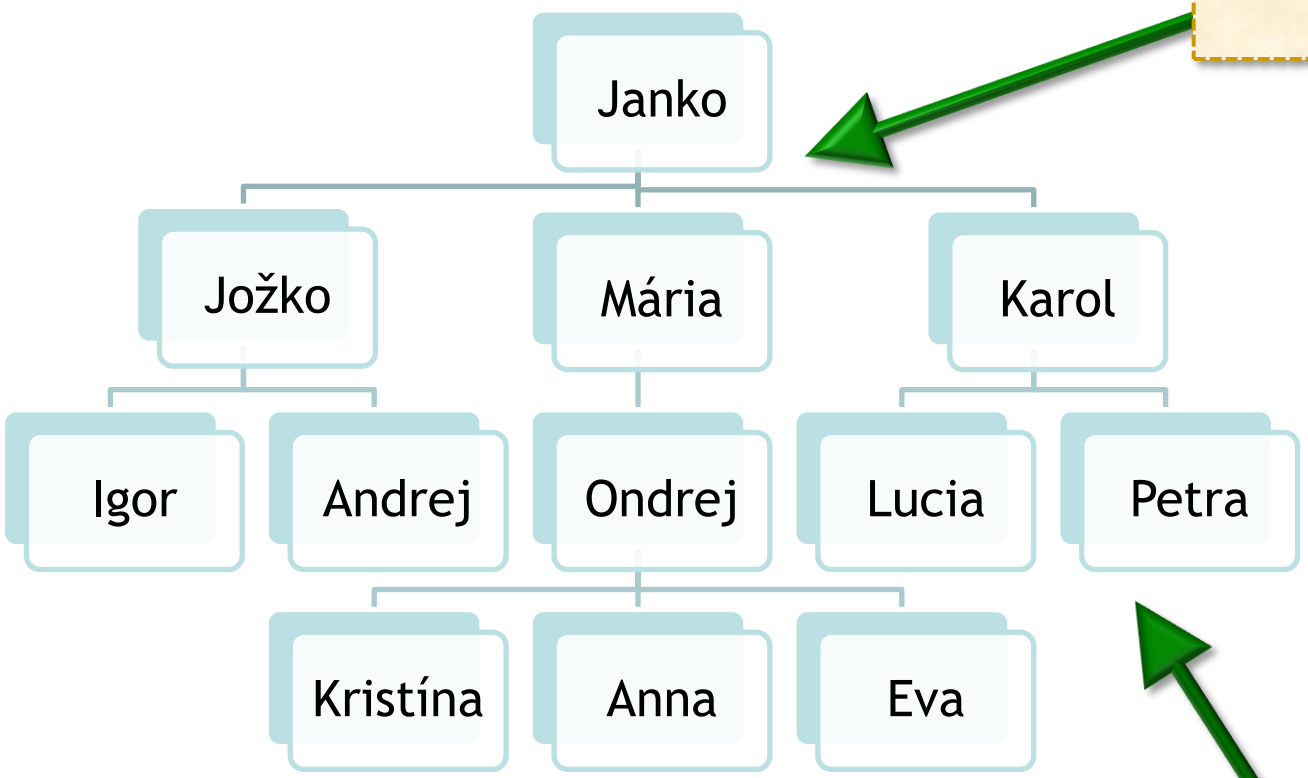


Stromové zobrazenie adresárovej štruktúry



Hierarchický diagram

Strom potomkov



Janko má deti Jožka, Máriu a Karola.

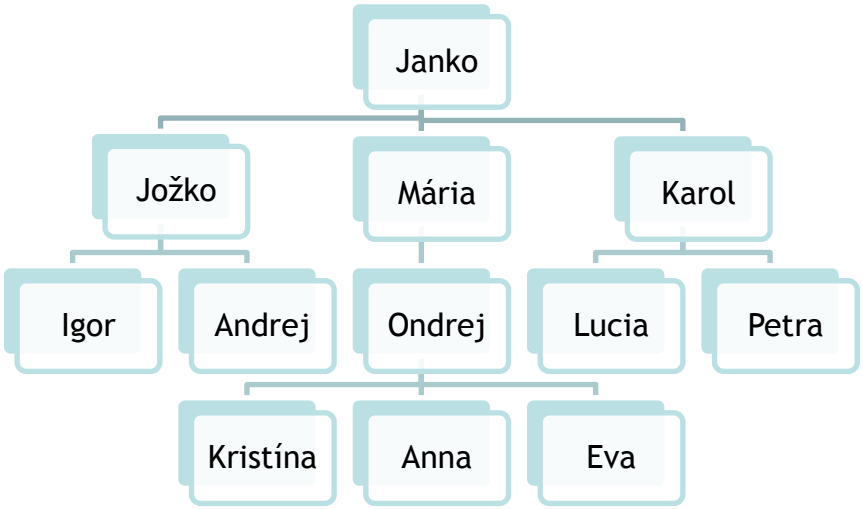
Karol má dcéry Luciu a Petru.

Strom potomkov v Jave

```
import java.util.List;

public class Osoba {
  private String meno;
  private List<Osoba> deti;
}
```

Meno, resp. ďalšie údaje o osobe.

Zoznam referencií na osoby, ktoré sú **deťmi** tejto osoby.



Rekurzívna údajová štruktúra. Osoba je definovaná zoznamom osôb.

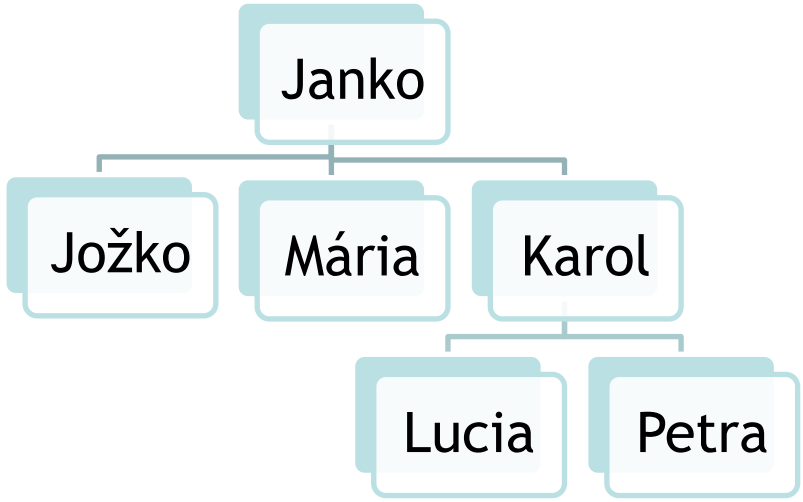
Strom potomkov v Jave

```
import java.util.*;

public class Osoba {
    private String meno;
    private List<Osoba> deti = new ArrayList<Osoba>();

    public Osoba(String meno) {
        this.meno = meno;
    }

    public void pridajDieta(Osoba dieta) {
        deti.add(dieta);
    }
}
```

V takto navrhnutej údajovej štruktúre osoba pozná len svoje deti, **nepozná svojho rodiča.**

Strom potomkov v Jave

```
public static void main(String[] args) {
    Osoba janko = new Osoba("Janko");
    Osoba jozko = new Osoba("Jozko");
    Osoba maria = new Osoba("Maria");
    Osoba karol = new Osoba("Karol");
    Osoba lucia = new Osoba("Lucia");
    Osoba petra = new Osoba("Petra");
    janko.pridajDieta(jozko);
    janko.pridajDieta(maria);
    janko.pridajDieta(karol);
    karol.pridajDieta(lucia);
    karol.pridajDieta(petra);
}
```



Genealogické otázky

- Osoby sa môžeme:
  - spýtať na celkový **počet potomkov**
  - spýtať na **počet generácií** potomkov
  - spýtať na **zoznam** všetkých **potomkov**
  - spýtať na **zoznam** potomkov **nejakej generácie**
  - …

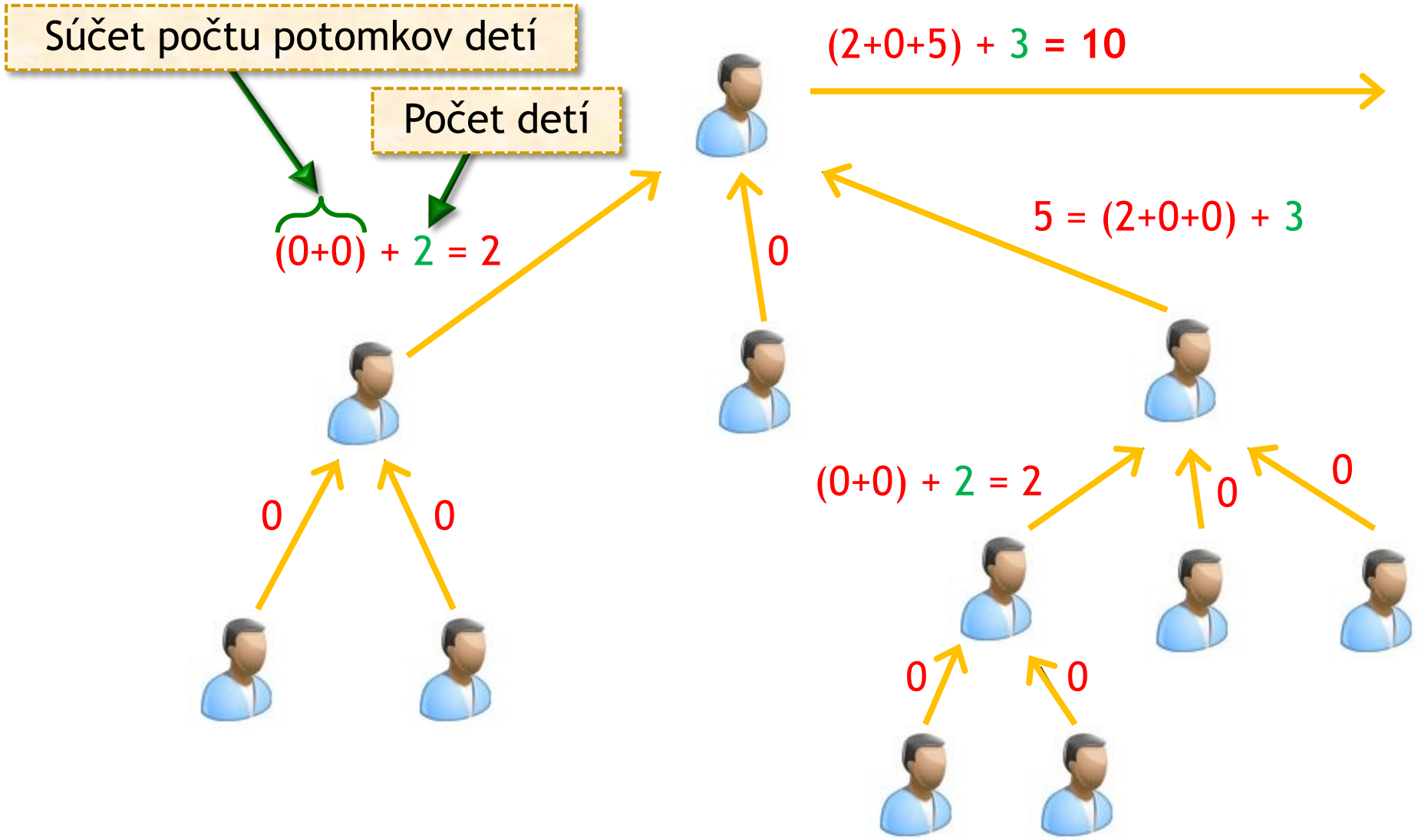
Počet potomkov

- **Potomkovia sú** deti osoby, ich deti, ich detí deti, ich detí detí deti, ich detí detí detí deti, ...
- **Obmedzenie štruktúry:** Osoba pozná len svoje deti, nie vnúčatá a ďalších potomkov, ...!

- **Algoritmus:**
  - spýtaj sa **každého** dieťaťa na počet potomkov
  - počet potomkov osoby je:

počet detí potomkov + počet detí

Počet potomkov



Počet potomkov (v Jave)

Spýtame sa detí na počty potomkov a **sčítame** ich odpovede.

```
public int pocetPotomkov() {
  int pocetPotomkovDeti = 0;
  for (Osoba dieta: deti)
    pocetPotomkovDeti += dieta.pocetPotomkov();

  return pocetPotomkovDeti + deti.size();
}
```

Metódu **pocetPotomkov** voláme nad iným objektom. Je to rekurzia?

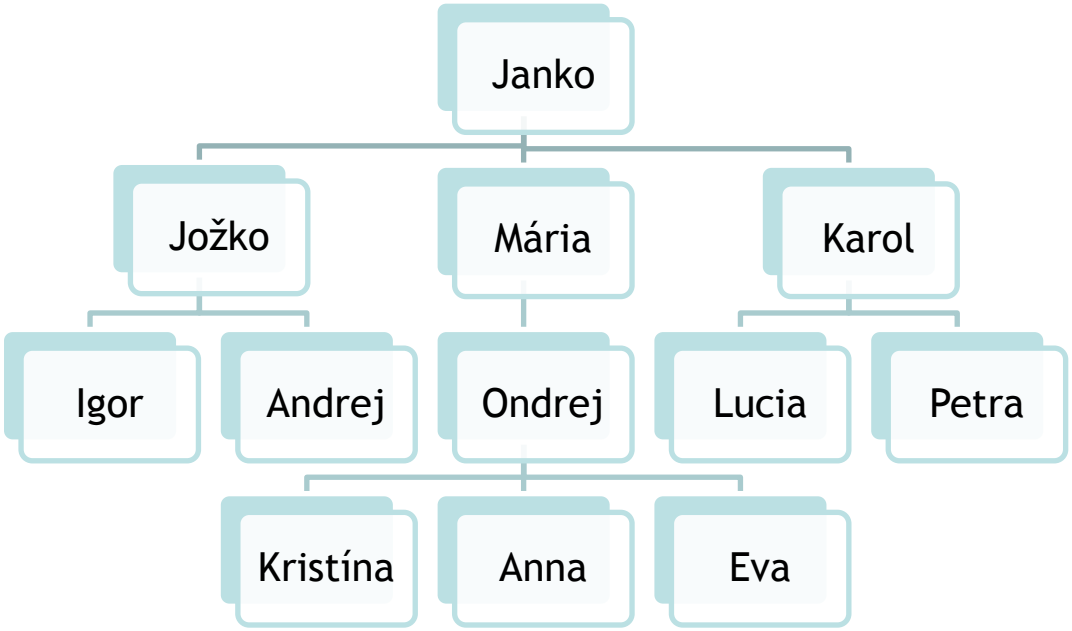
Výsledná odpoveď je **súčet počtu potomkov detí** a **počet detí**

Výpis rodostromu osoby

- **Algoritmus:**
  - vypíšeme meno osoby
  - požiadame deti, aby vypísali svoje rodostromy

```
public void vypisRodostrom() {
    System.out.println(meno);

    for (Osoba dieta: deti)
        dieta.vypisRodostrom();
}
```

Výpis rodostromu osoby




```
public void vypisRodostrom() {
    System.out.println(meno);

    for (Osoba dieta: deti)
        dieta.vypisRodostrom();
}
```

```
janko.vypisRodostrom();
```

```
Janko
Jožko
Igor
Andrej
Mária
Ondrej
Kristína
Anna
Eva
Karol
Lucia
Petra
```

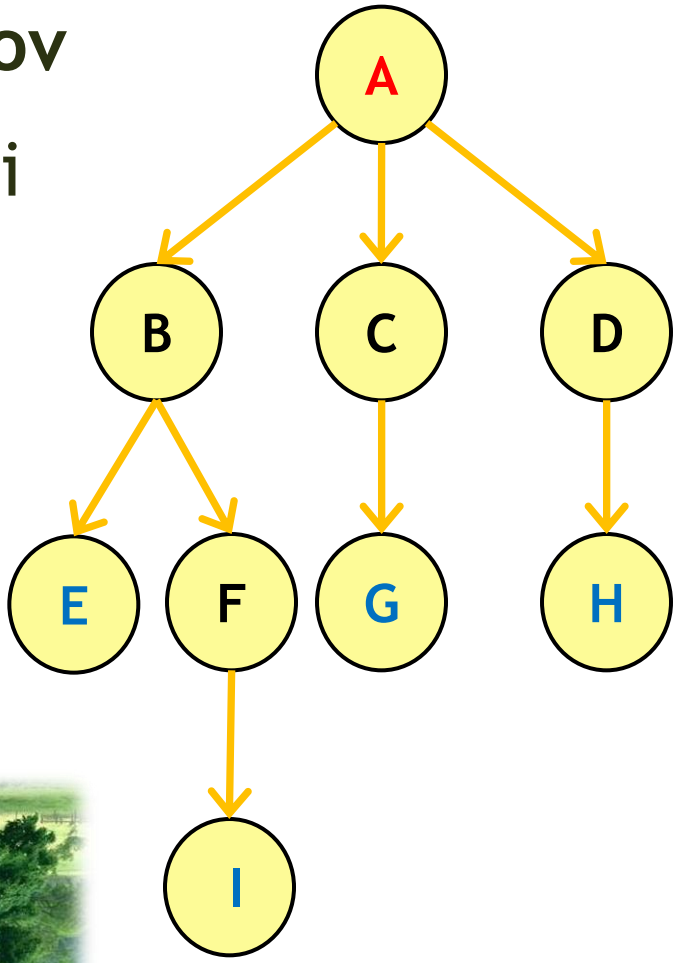
Základná schéma

- **Základná schéma** vykonania *akcie* objektu **`Osoba`**:
  - **priprav sa** na vykonanie *akcie* u detí (ak treba)
  - **požiadaj deti** (postupne po jednom) o vykonanie *akcie*
  - **na základe výsledkov** akcií **detí**, dokonči svoju *akciu* (ak treba)

```
public int pocetPotomkov() {
    int pocetPotomkovDeti = 0;
    for (Osoba dieta: deti)
        pocetPotomkovDeti += dieta.pocetPotomkov();

    return pocetPotomkovDeti + deti.size();
}
```

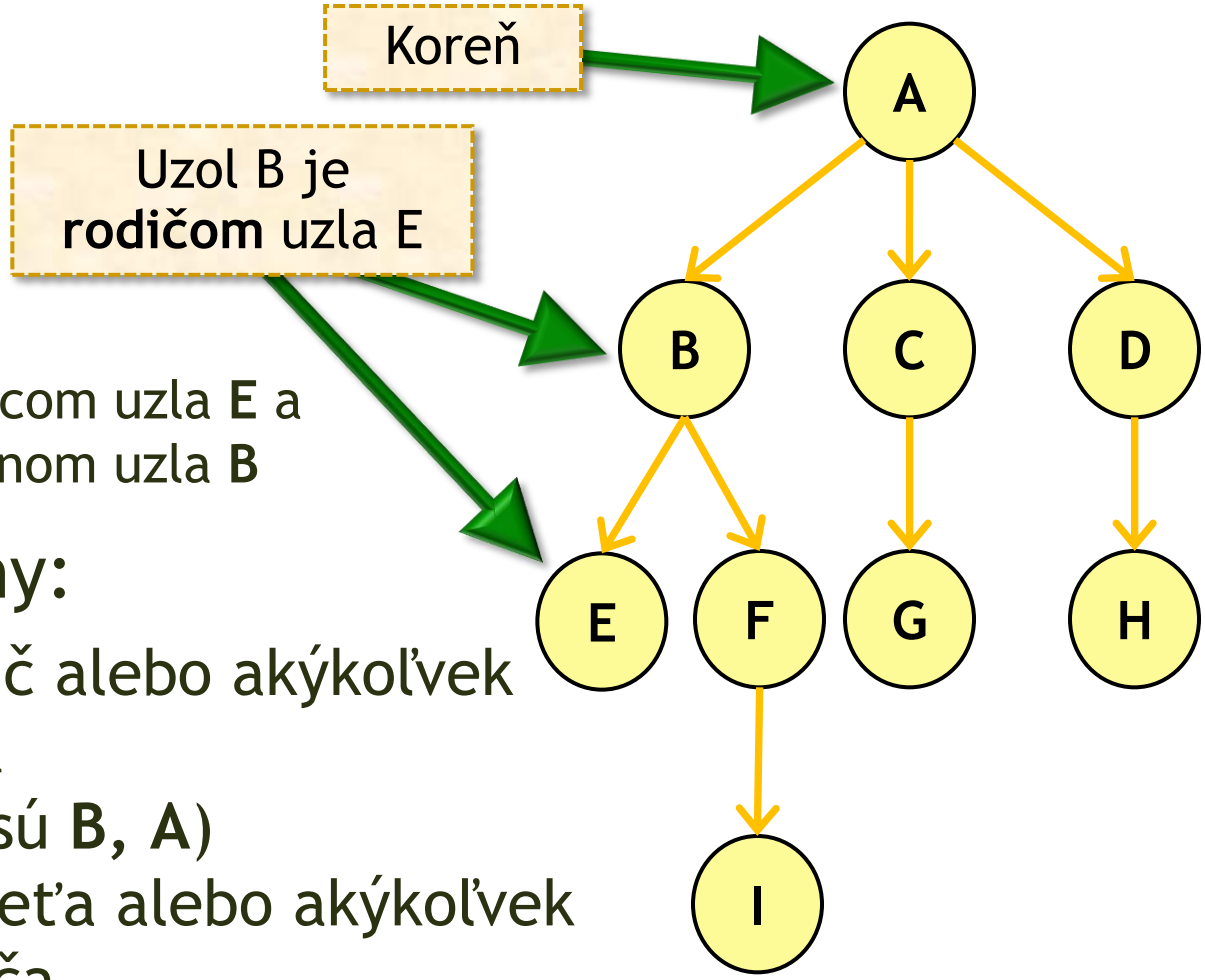
Stromová terminológia

- Strom sa skladá z **vrcholov/uzlov**
- Uzol môže, ale nemusí mať deti
- Špeciálny uzol na vrchole hierarchie: **koreň**
- Uzly delíme na:
  - **vnútorné uzly** – uzly, ktoré majú aspoň jedno dieťa
  - **listy** – uzly bez detí



Stromová terminológia

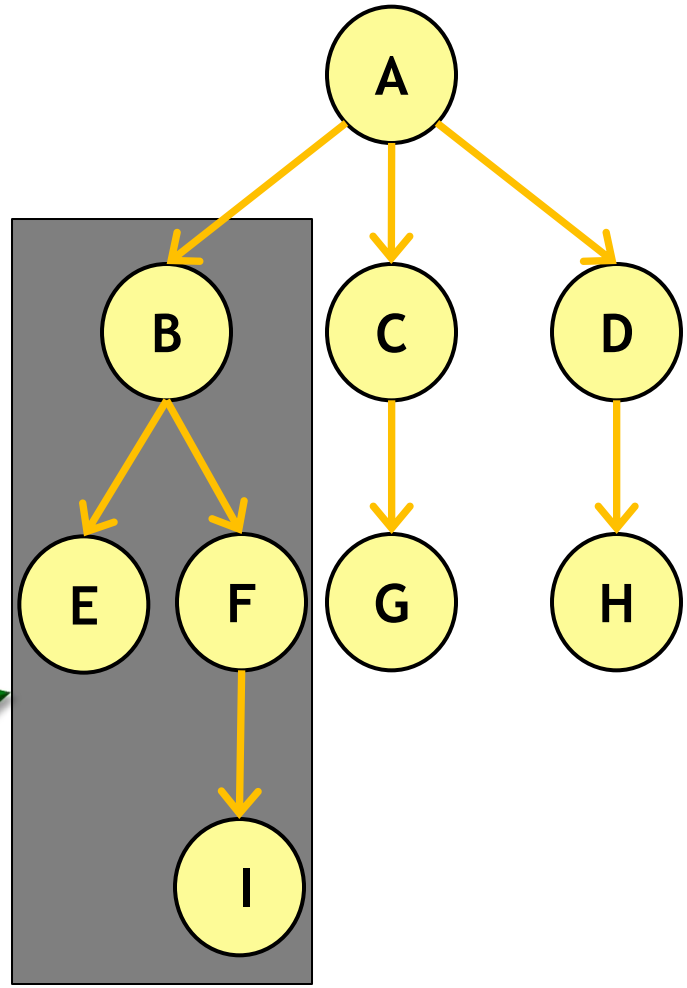
- Priame vzťahy:
  - rodič/dieťa
  - otec/syn
    - uzol **B** je otcom uzla **E** a
    - uzol **E** je synom uzla **B**
- Nepriame vzťahy:
  - **predok** = rodič alebo akýkoľvek predok rodiča (predkovia **E** sú **B, A**)
  - **potomok** = dieťa alebo akýkoľvek potomok rodiča (potomkovia **B** sú **E, F, I**)



Podstromy

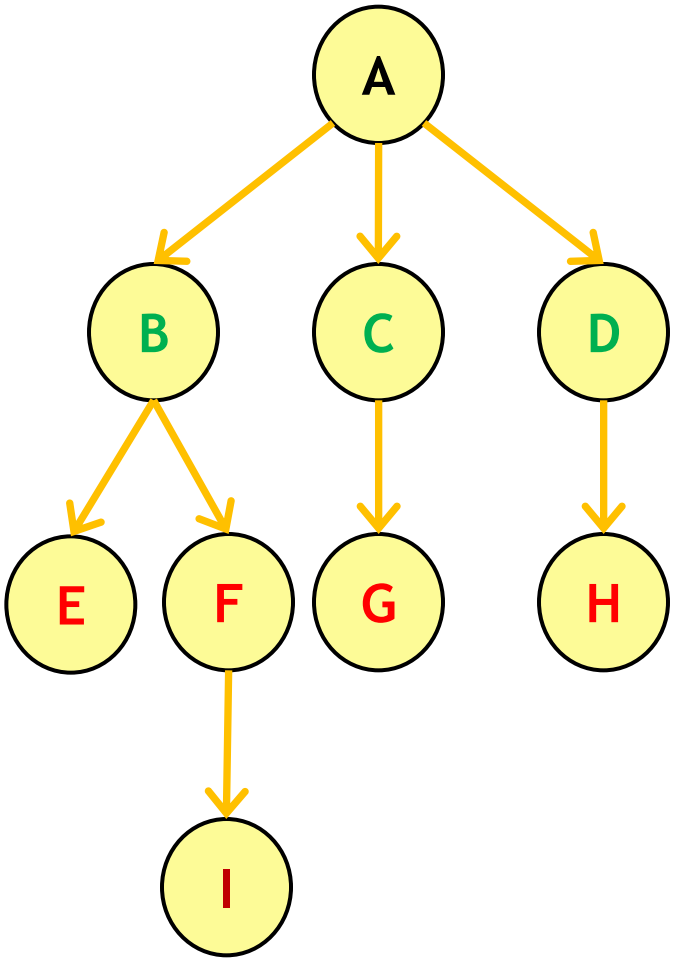
- Ak si vyberieme akýkoľvek uzol stromu, ten spolu so všetkými svojimi potomkami tvorí **podstrom**.
- **Rekurzia:** časťou stromu je strom

Podstrom s koreňom v uzle **B**



Stromová terminológia

- **Výška stromu** - 3
  - počet generácií potomkov koreňa stromu
  - maximálna vzdialenosť nejakého uzla od koreňa stromu
- **Úroveň stromu**
  - uzly stromu v rovnakej vzdialenosti od koreňa
- **Šírka stromu** - 4
  - maximum z počtu uzlov v jednej úrovni



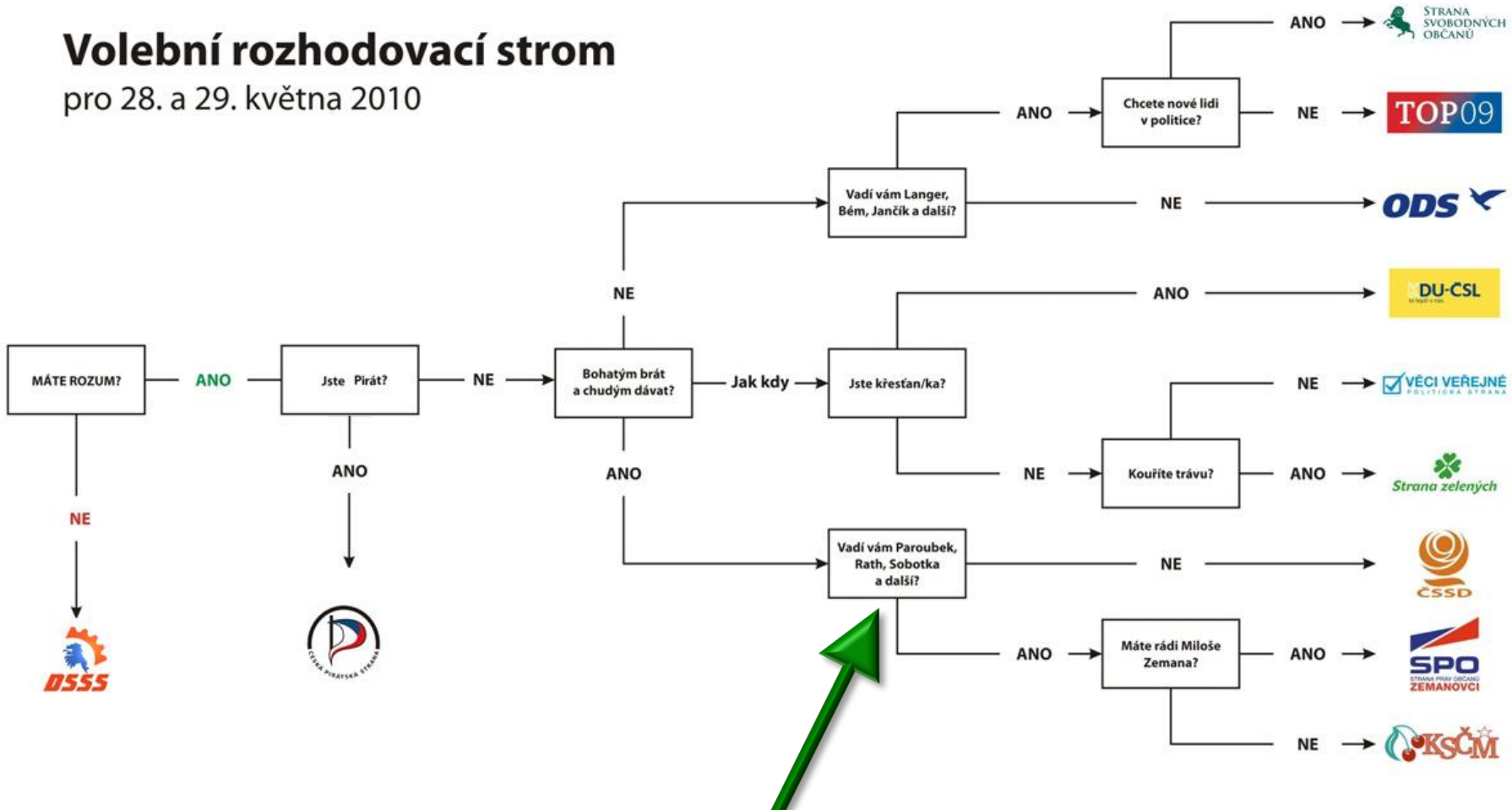
Stromy - sumarizácia

- Strom je **rekurzívna** štruktúra:
  - **koreň**
  - **podstromy** zakorenené v deťoch koreňa
- Rekurzívna údajová štruktúra = rekurzívne algoritmy
- Z koreňa sa vieme dostať do ľubovoľného uzla stromu (jednosmerná cesta)
- Porovanie so **spájanými zoznamami**:
  - uzol spájaného zoznamu = 0 alebo jeden následovník
  - uzol stromu = 0 alebo veľa následovníkov
- Aplikácie: súborový systém, hierarchie, …

„Politika dvoch detí“

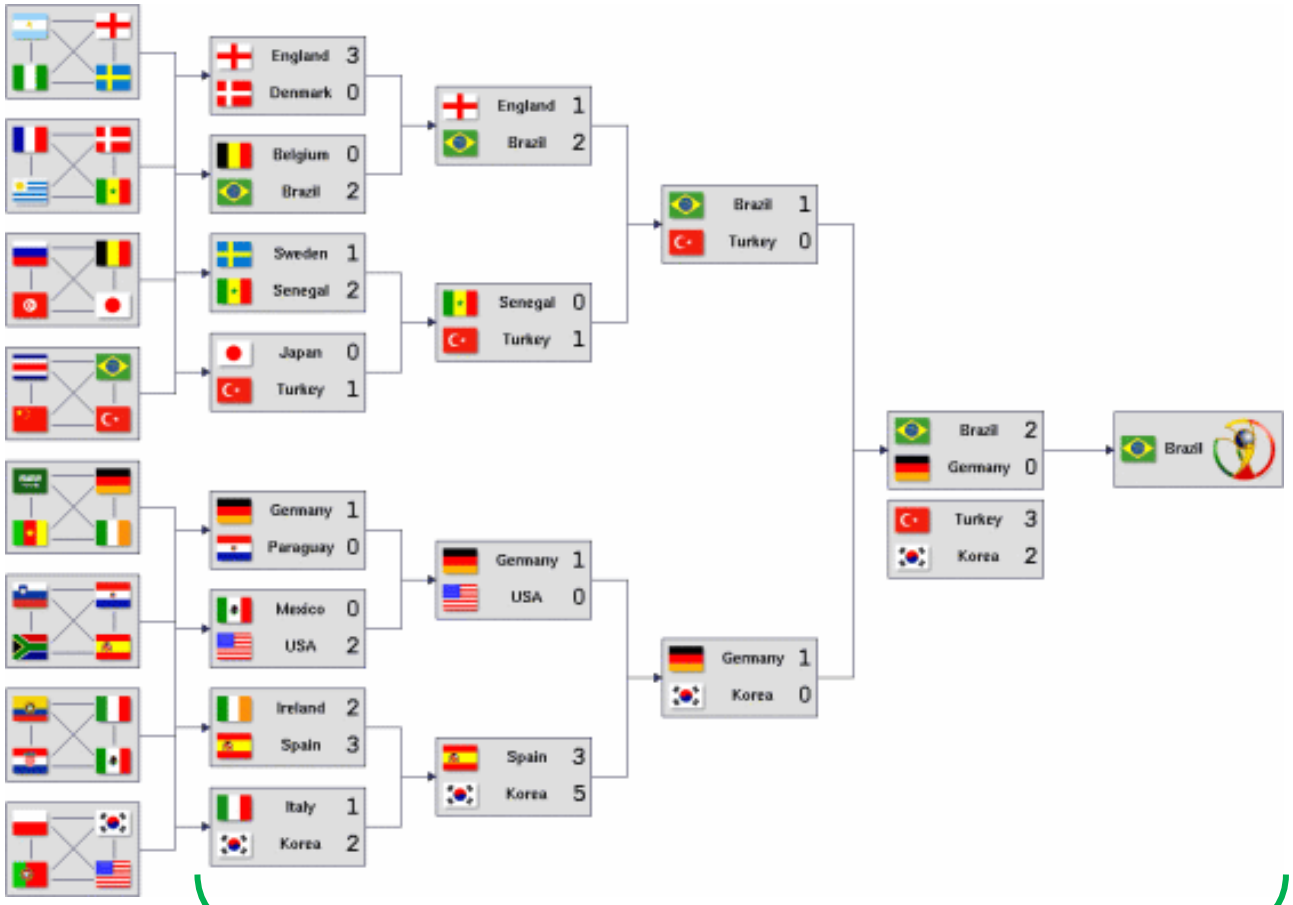
Pre mnohé aplikácie stromov stačí limit dvoch detí pre každý uzol stromu ...

Keď (skoro) dve deti stačia



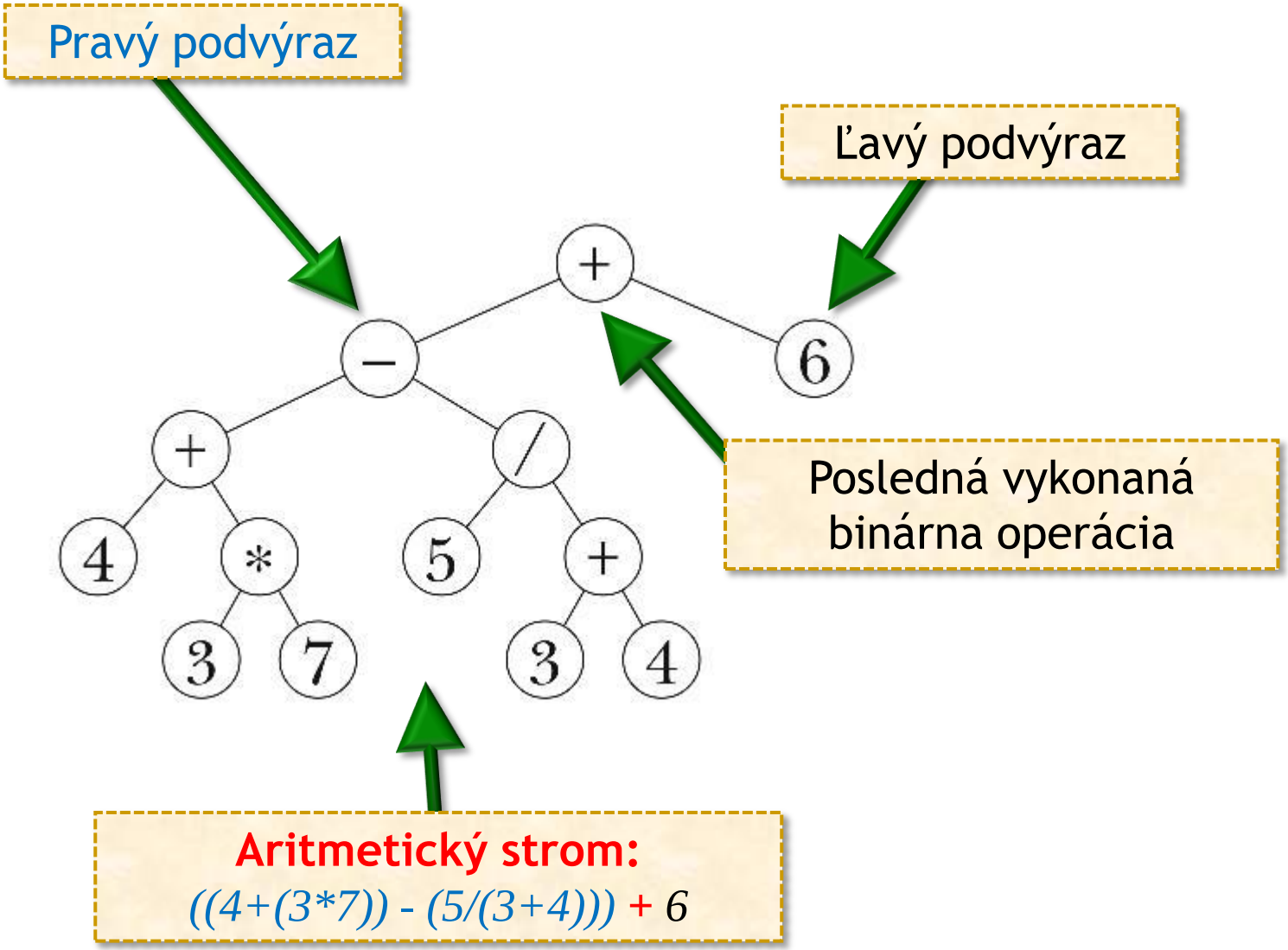
Rozhodovací strom:
Ano/Nie pokračovanie

Keď dve deti stačia



Strom zápasov v turnaji
(„play-off“ časť)

Keď dve deti stačia



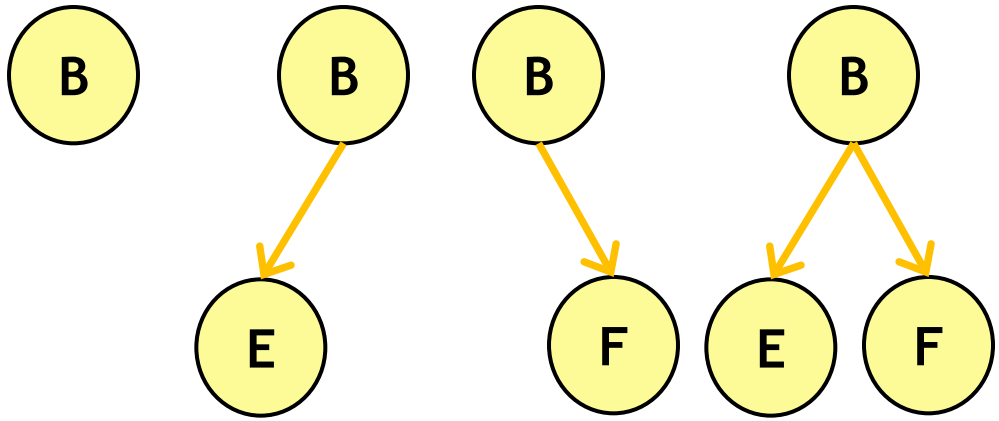
Binárne stromy

- Binárne stromy sú špeciálnym prípadom stromov, v ktorých má každý uzol nanajvýš 2 deti:
  - **ľavý syn**
  - **pravý syn**

Vo väčšine aplikácií má zmysel rozlišovať synov (napr. áno/nie)...

- Možné „stavy“ uzla:
  - žiadny syn
  - len ľavý syn
  - len pravý syn
  - ľavý aj pravý syn

E – ľavý syn
F – pravý syn



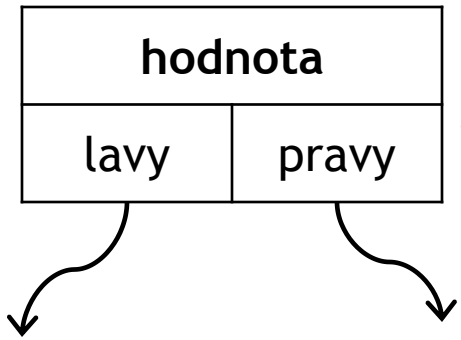
Binárne stromy (v Jave)

```
public class Uzol {
  int hodnota;

  Uzol lavy;
  Uzol pravy;
}
```

Hodnota uložená v uzle

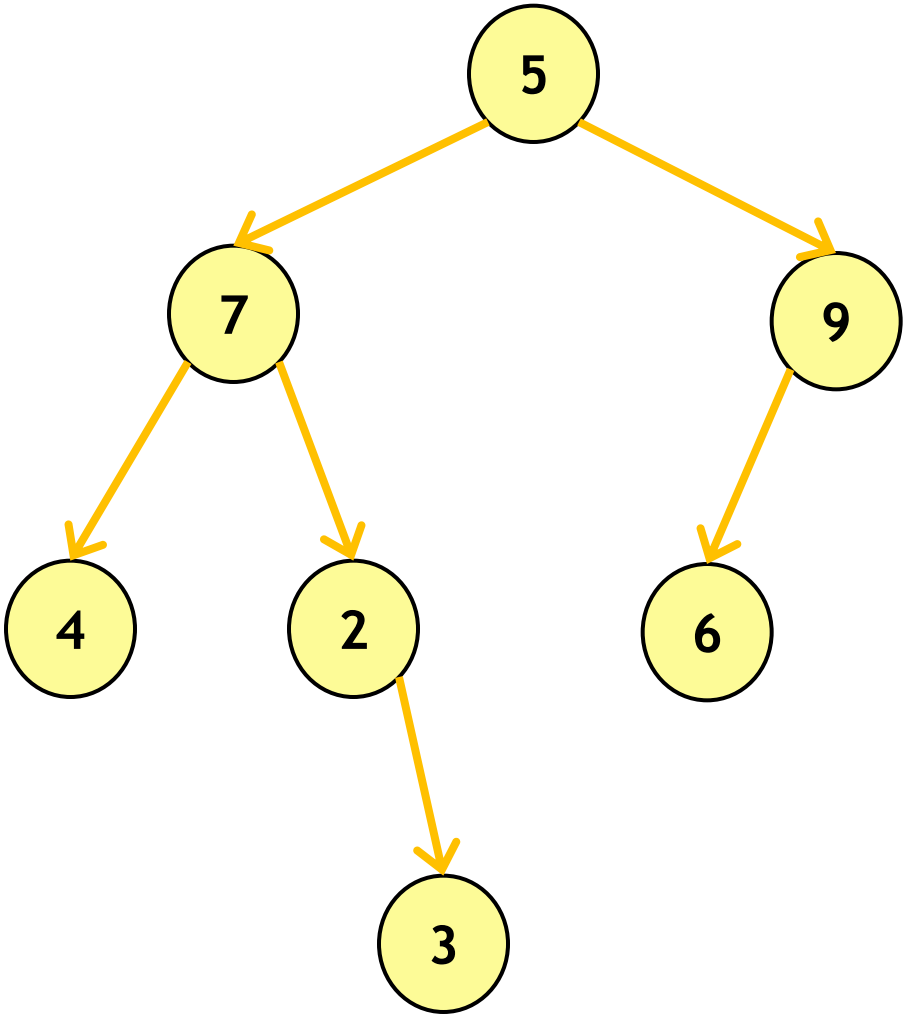
Referencia na ľavého syna

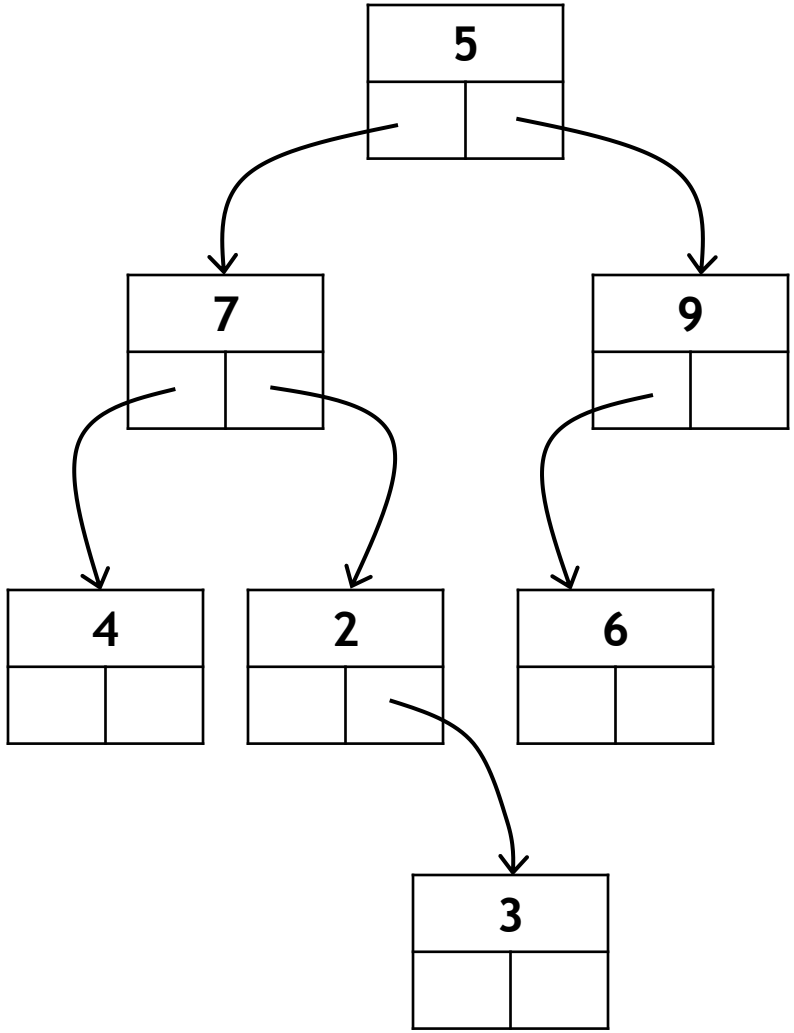
Referencia na pravého syna



Základná stavebná jednotka binárneho stromu

Binárne stromy





Čo so stromami?

- Strom **uchováva údaje** v uzloch (zvyčajne je to viac ako jedna hodnota), našim cieľom je s týmito údajmi niečo spraviť:
  - **výpis údajov**
    - aritmetický výraz (infixová vs. postfixová notácia), odohrané zápasy, všetky otázky rozhodovacieho stromu
  - **zistiť niečo ...**
    - zápas, v ktorom sa dalo najviac gólov
    - najčastejší výsledok rozhodovacieho stromu
    - zistiť, či aritmetický výraz obsahuje konktrétnu operáciu alebo číselnú hodnotu

Prechody binárnym stromom

- Na to, aby sme sa dostali k ľubovoľnému vrcholu stromu stačí **referencia na koreň**
- **Problém:** ako systematicky navštíviť všetky hodnoty (resp. uzly) stromu?
- **Rekurzívna idea:**
  - **spracuj hodnotu** uloženú v aktuálnom uzle
  - navštív hodnoty v podstrome zakorenenom **v ľavom** synovi
  - navštív hodnoty v podstrome zakorenenom **v pravom** synovi

Výpis hodnôt v binárnom strome

```
public void vypis() {
    System.out.println(hodnota);

    if (lavy != null)
        lavy.vypis();

    if (pravy != null)
        pravy.vypis();
}
```

Spracovanie hodnoty v aktuálnom uzle

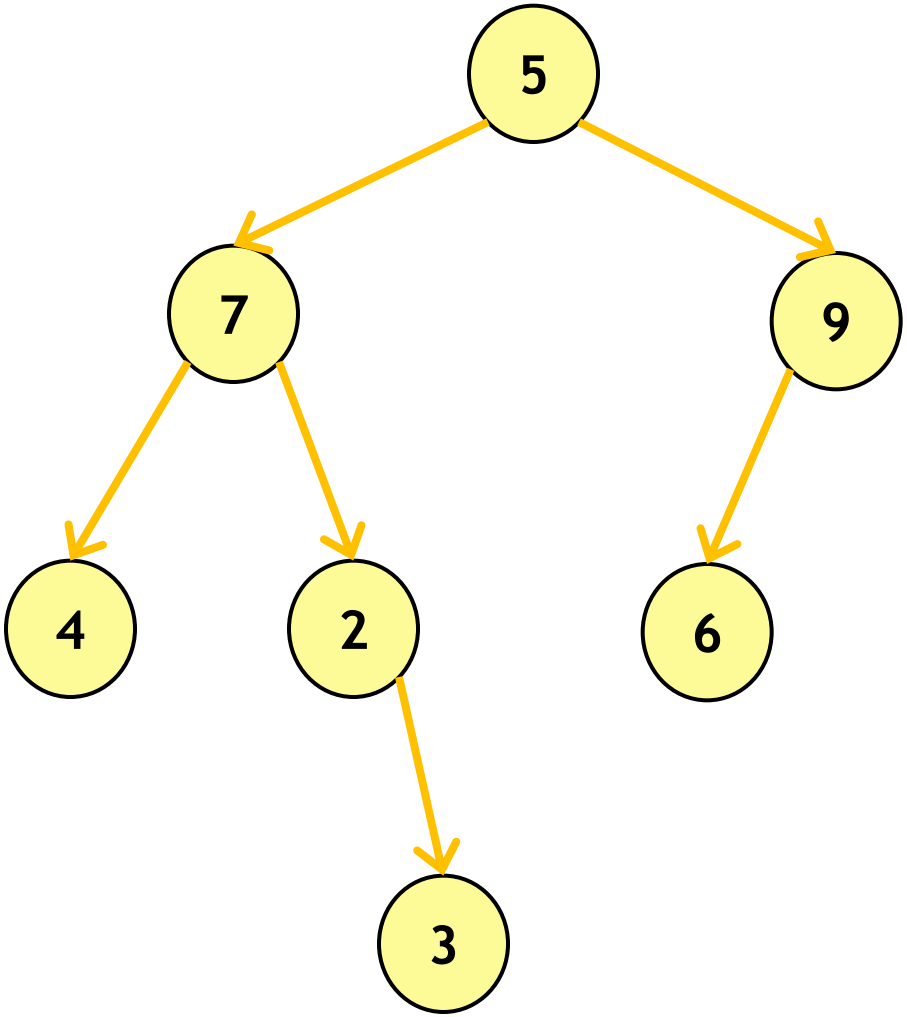
Spracovanie hodnôt uložených najprv v ľavom a potom v pravom podstrome.

Pozor: Pred pristúpením k synovi musíme otestovať jeho existenciu!

Prechody binárnym stromom

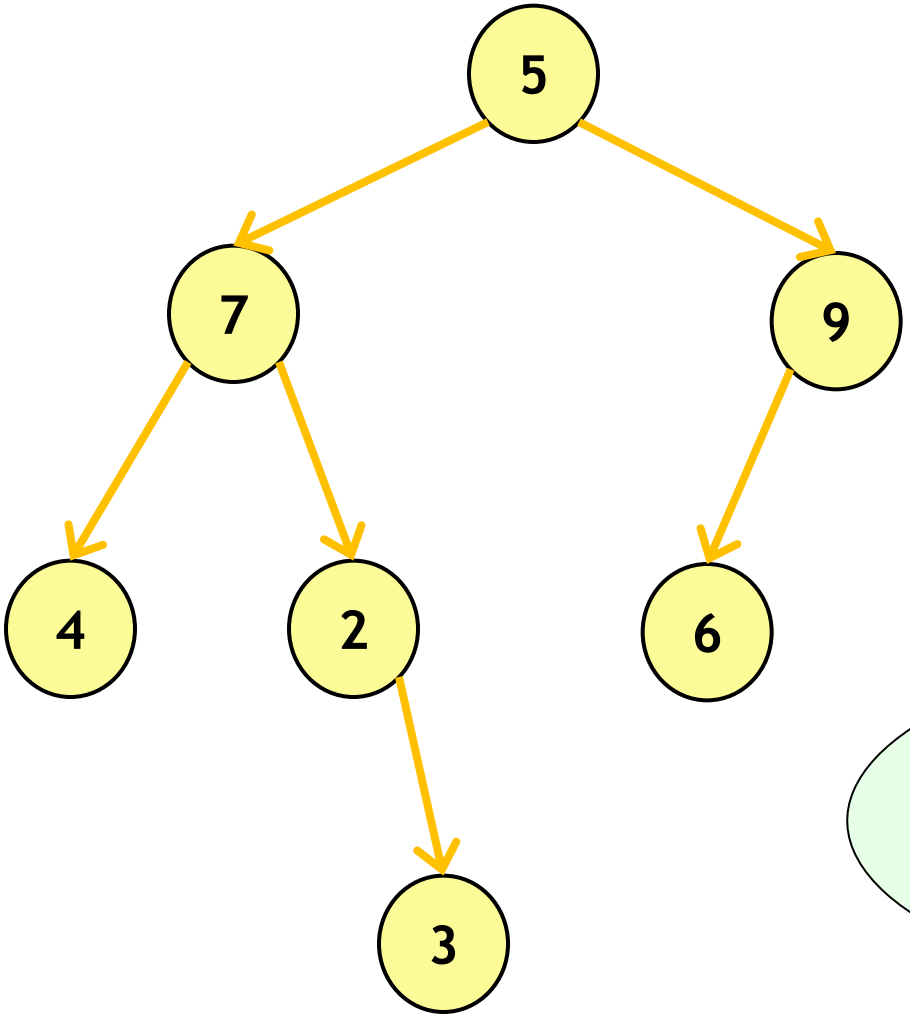
- Podľa toho, kedy spracujeme hodnotu v uzle, rozlišujeme niekoľko prechodov:
  - **Preorder:**
    - uzol, ľavý podstrom, pravý podstrom
  - **Inorder:**
    - ľavý podstrom, uzol, pravý podstrom
  - **Postorder:**
    - ľavý podstrom, pravý podstrom, uzol

Príklady prechodov



Preorder	Inorder	Postorder
5	4	4
7	7	3
4	2	2
2	3	7
3	5	6
9	6	9
6	9	5

Príklady prechodov



Preorder:

5, 7, 4, 2, 3, 9, 6

Inorder:

4, 7, 2, 3, 5, 6, 9

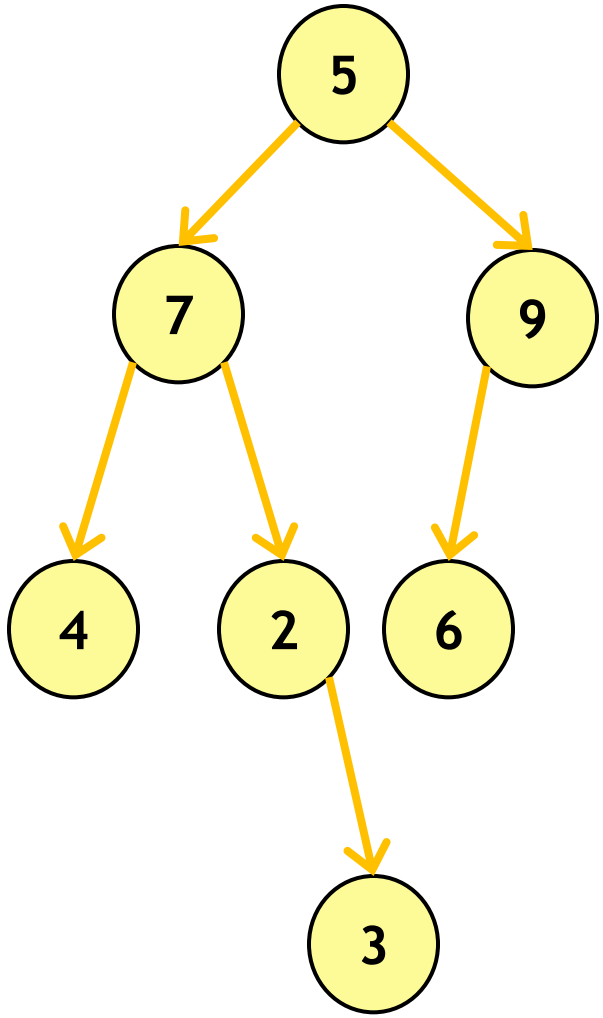
Postorder:

4, 3, 2, 7, 6, 9, 5

Ako z dvoch postupností prechodu stromom zrekonštruovať binárny strom?

Výpočet maxima v strome

- **Idea** (na začiatku sa pýtame koreňa):
  - ak má uzol ľavého syna, požiadame ho o maximum v ňom zakorenenom podstrome
  - ak má uzol pravého syna, požiadame ho o maximum v ňom zakorenenom podstrome
  - odpoveďou je maximum z uloženej hodnoty a maxím od synov



Výpočet maxima v strome

```
public int maximum() {
  int vysledok = hodnota;

  if (lavy != null)
    vysledok = Math.max(vysledok, lavy.maximum());

  if (pravy != null)
    vysledok = Math.max(vysledok, pravy.maximum());

  return vysledok;
}
```

- **Časová zložitosť:** Každý uzol navštívime len raz, v každom uzle strávime operáciami čas $O(1)$. Celkový čas je $O(n)$ v strome s n uzlami.

Hľadanie hodnoty v strome

```
public boolean obsahuje(int hladany) {
  if (hodnota == hladany)
    return true;

  if (lavy != null)
    if (lavy.obsahuje(hladany))
      return true;

  if (pravy != null)
    if (pravy.obsahuje(hladany))
      return true;

  return false;
}
```

Ak je ľavý syn, skúsime nájsť hodnotu v ľavom podstrome.

Ak je pravý syn, skúsime nájsť hodnotu v pravom podstrome.

- **Časová zložitosť:** $O(n)$, kde n je počet uzlov stromu

„Mashup nápad“

- Čo už vieme:
  - **spájaný zoznam** – dobrá vec na uchovávanie dynamicky sa meniaceho zoznamu hodnôt
  - **binárne vyhľadávanie** – superrýchla ($O(\log n)$) stratégia na nájdenie prvky v usporiadanom zozname
- usporiadaný spájaný zoznam + binárne vyhľadávanie?
  - **nefunguje** – len na to, aby sme sa dostali na zadaný index (napr. do stredu), potrebujeme čas $O(n)$

Nedá sa s tým niečo spraviť?

Čo je binárne vyhľadávanie?

Hľadaná hodnota: H

Pozri na hodnotu X
v strede zoznamu

ak H < X

ak X < H

hľadaj H „vľavo“

hľadaj H „vpravo“

Referencia na „ľavú“
časť usporiadaného
zoznamu

Referencia na „pravú“
časť usporiadaného
zoznamu

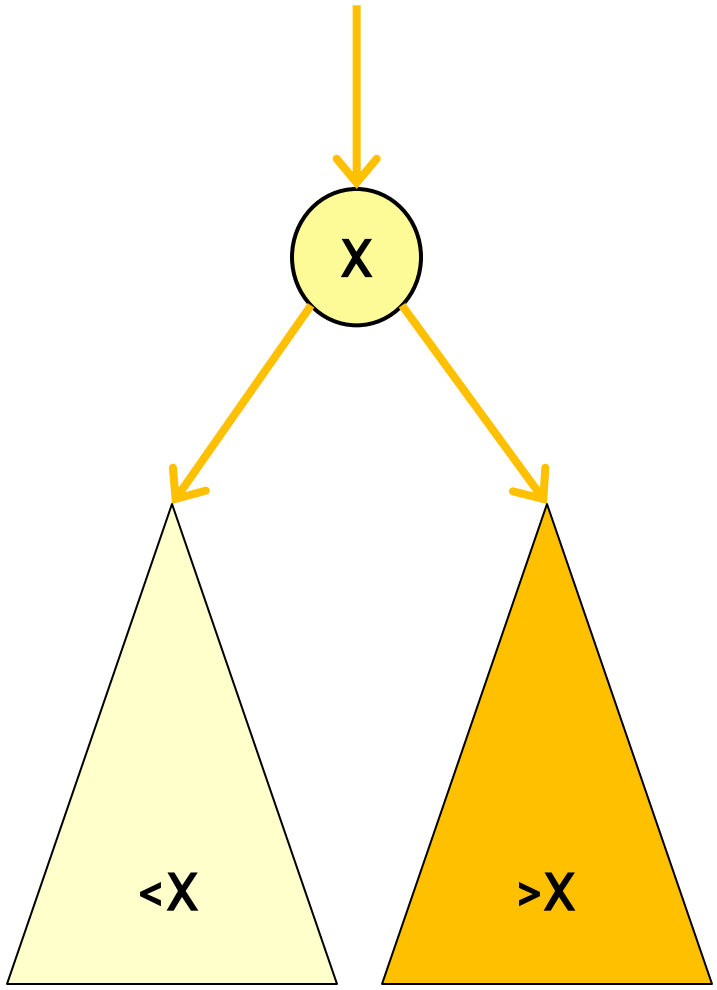
Binárne vyhľadávacie stromy (BVS)

- **Binárne vyhľadávacie stromy** slúžia na uloženie dynamicky sa meniacej **množiny hodnôt** typu, ktorého prvky môžeme navzájom porovnávať:
  - trieda **`TreeSet<E>`** uchováva prvky množiny interne uložené v modifikovanej verzii BVS
  - **`TreeSet<E>`** vyžaduje, aby **`E`** implementovalo **`Comparable`** alebo **`Comparator<E>`** ako porovnávač

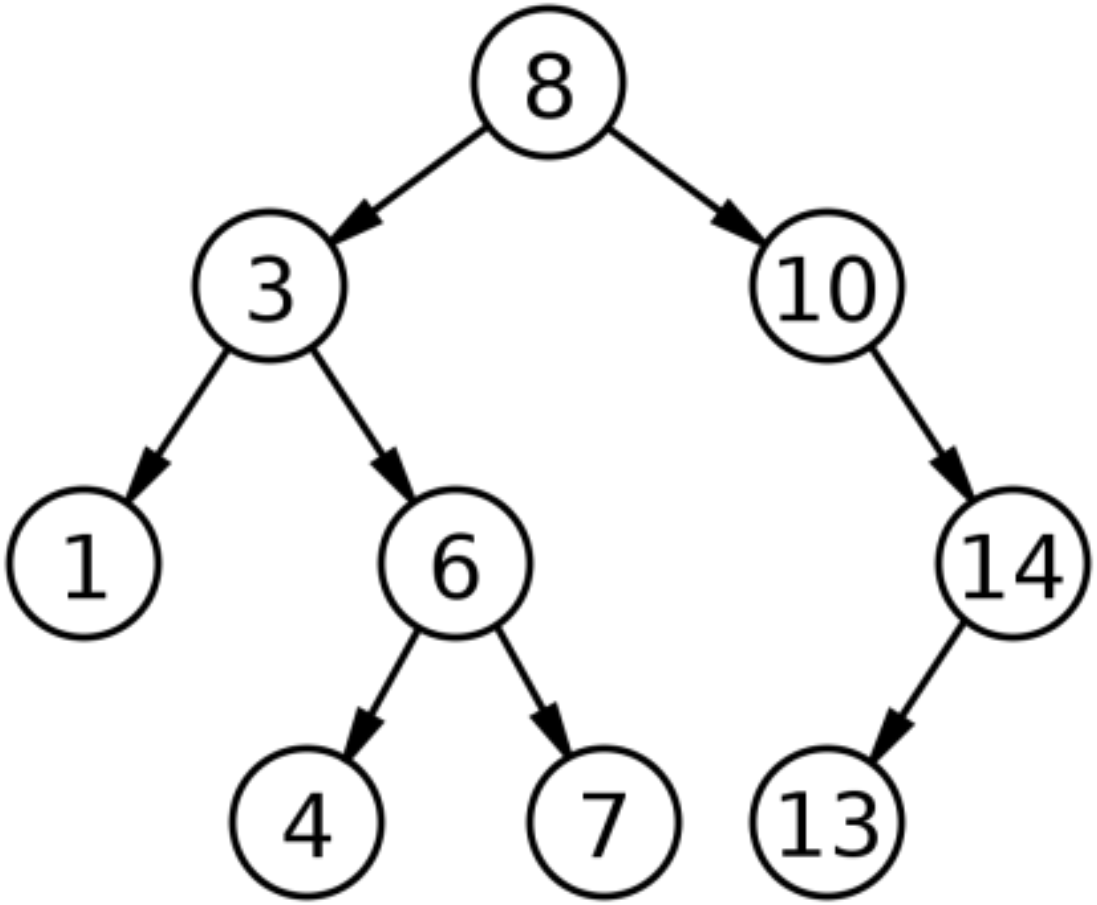
- **Idea:** chytrým umiestnením hodnôt do uzlov binárneho stromu vieme dosiahnuť rýchlu realizáciu operácií *add*, *remove* a *contains*.

BVS - vlastnosti

- Hodnoty sú uložené v uzloch
  - každá hodnota len raz (lebo množina...)
- Pre **každý** uzol BVS platí:
  - každá hodnota uložená v ľavom podstrome uzla je **menšia** ako hodnota v tomto uzle
  - každá hodnota uložená v pravom podstrome uzla je **väčšia** ako hodnota v tomto uzle



Príklad BVS



Využitie vlastností BVS

- Pri hľadaní hodnoty nemusíme hľadať hodnotu v oboch podstromoch, stačí sa pozrieť do jedného.
- **Algoritmus** hľadania hodnoty **H** pre uzol s uloženou hodnotou **V**:
  - ak **H** = **V**, potom **H** je v BVS
  - ak **H** < **V**, tak v hľadaní treba pokračovať v ľavom podstrome (ak existuje, v opačnom prípade **H** nie je v BVS)
  - ak **H** > **V**, tak v hľadaní treba pokračovať v pravom podstome (ak existuje, v opačnom prípade **H** nie je v BVS)

Hľadanie hodnoty v BVS

```
public boolean obsahujeVBVS(int hladany) {
  if (hodnota == hladany)
    return true;

  if (hladany < hodnota)
    return (lavy != null) && lavy.obsahujeVBVS(hladany);

  if (hodnota < hladany)
    return (pravy != null) && pravy.obsahujeVBVS(hladany);

  return false;
}
```

Nerekurzívne hľadanie

```
public static boolean obsahujeVBVS(Uzol koren, int hladany){
  Uzol aktualny = koren;

  while (aktualny != null) {
    if (aktualny.hodnota == hladany)
      return true;

    if (hladany < aktualny.hodnota)
      aktualny = aktualny.lavy;

    if (aktualny.hodnota < hladany)
      aktualny = aktualny.pravy;
  }

  return false;
}
```

Ako ďalší uzol na navštívenie vyberieme to dieťa, kam nás pošle porovnanie **hľadanej hodnoty** a **hodnoty v aktuálnom uzle**.

Maximum v BVS

- Vďaka vlastnostiam BVS je algoritmus na nájdenie maximálnej hodnoty v BVS:
  - kým sa dá, presuň sa do pravého syna aktuálneho uzla
  - uzol, v ktorom hľadanie skončilo (nemá pravého syna) je maximum (prečo?)

```
public static int maximum(Uzol koren) {
  Uzol aktualny = koren;
  while (aktualny.pravy != null)
     aktualny = aktualny.pravy;

  return aktualny.hodnota;
}
```

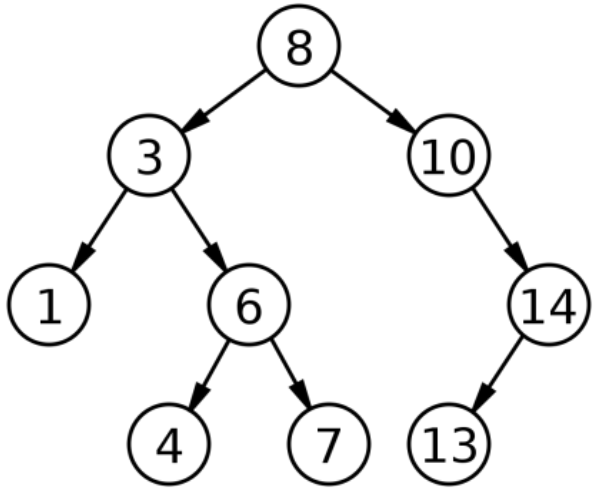
Kým sa dá, ideme do pravého syna.

Pridanie hodnoty do BVS

- **Problém:**
  - hodnotu nepridávame do BVS, ak tam už je
  - uzol s vkladanou hodnotu nemôžeme „zavesiť“ hocikde, pretože môžeme narušiť vlastnosti BVS
- **Algoritmus:**
  - tvárime sa, že hodnotu nechceme do BVS **pridať**, ale chceme zistiť, či sa tam nachádza
    - ak ju nájdeme, nie je čo riešiť …
    - ak ju nenájdeme, algoritmus skončí tak, že v hľadaní budeme presmerovaný na neexistujúci uzol – toto je správne miesto, kam máme uzol s vkladanou hodnotou „zavesiť“ (prečo?)

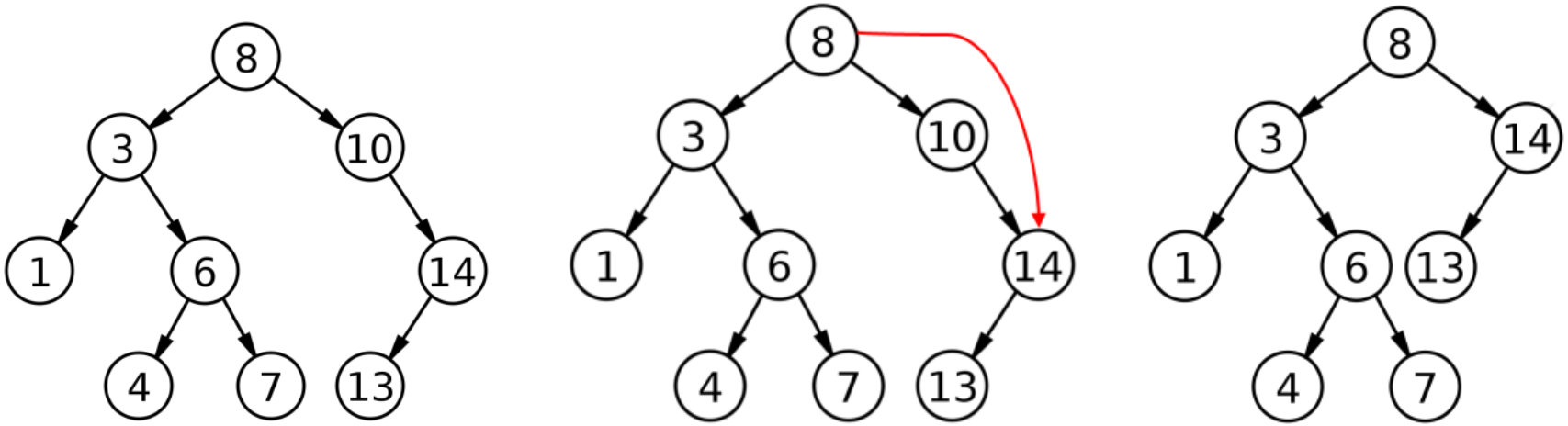
Odstránenie hodnoty z BVS

- **Problém:**
  - uzol s odstraňovanou hodnotou treba najprv nájsť
  - odstránenie uzla s hodnotou v strome môže narušiť vlastnosti BVS
- **3 situácie:**
  - odstraňovaný uzol je listom
  - odstraňovaný uzol má 1 dieťa
  - odstraňovaný uzol má 2 deti



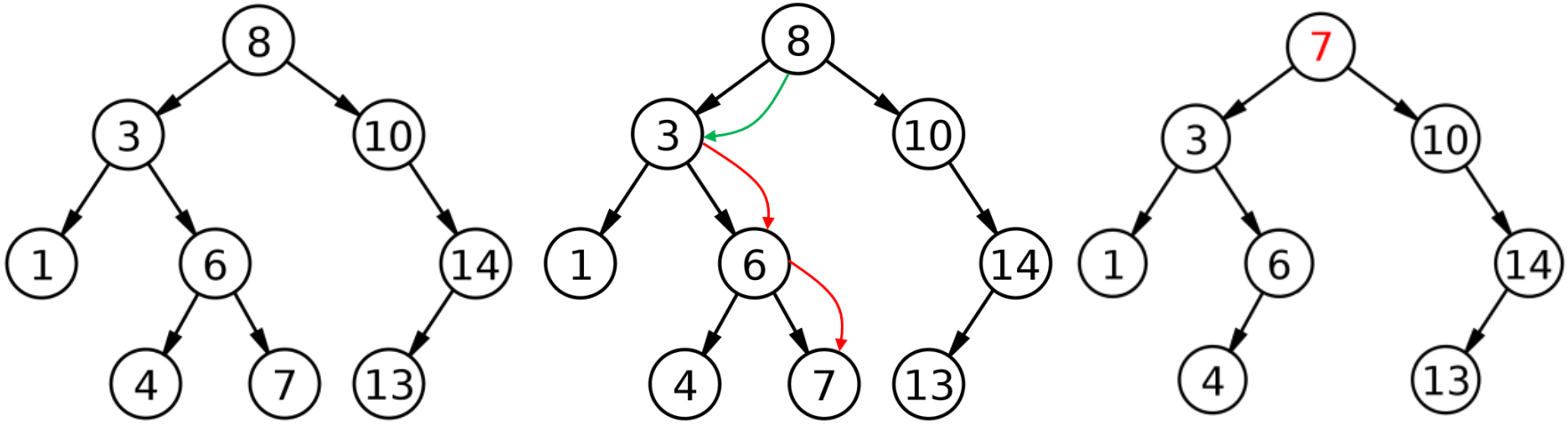
Odstránenie hodnoty z BVS

- Odstraňovaný uzol je listom:
  - uzol jednoducho odstránime (nie je čo pokaziť)
- Odstraňovaný uzol (*10*) má 1 dieťa:
  - odstraňovaný uzol (u jeho rodiča) nahradíme dieťaťom odstraňovaného uzla



Odstránenie hodnoty z BVS

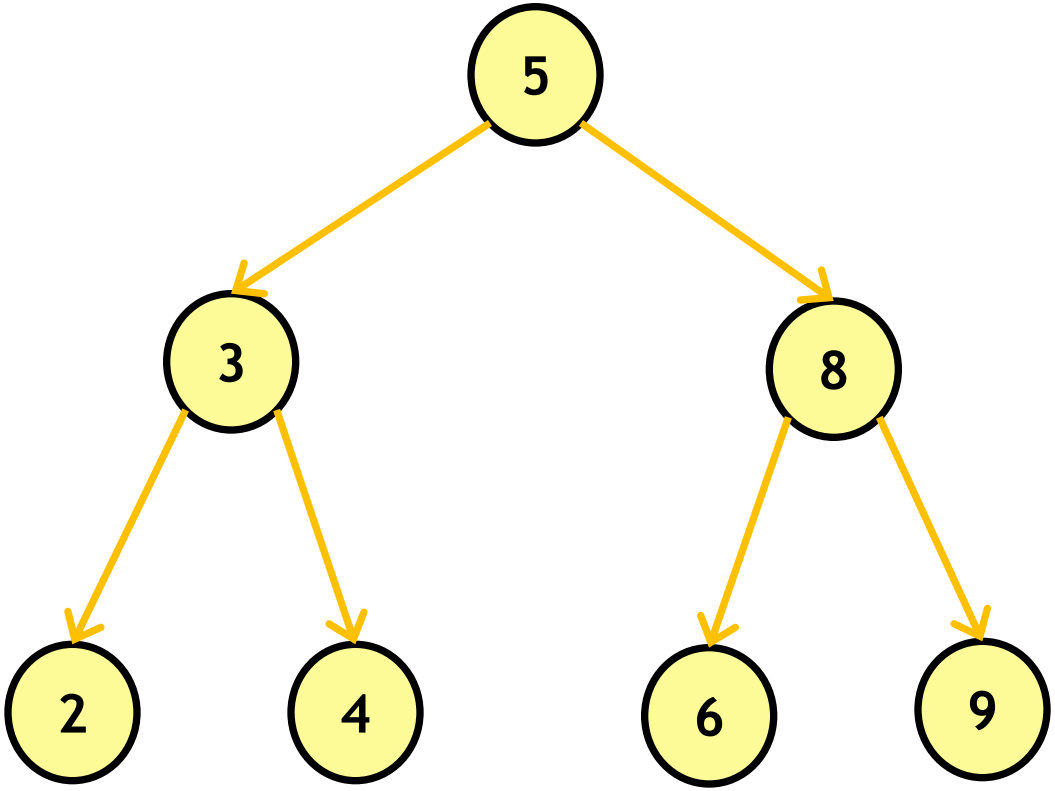
- Odstraňovaný uzol (*8*) má 2 deti:
  - namiesto odstraňovaného uzla **odstránime iný uzol**
  - nájdeme **maximum v ľavom podstrome** odstraňovaného uzla (raz vľavo, potom stále vpravo, kým sa dá)
  - odstránime uzol s nájdeným **maximom** a hodnotu nájdeného maxima uložíme do pôvodne odstraňovaného uzla



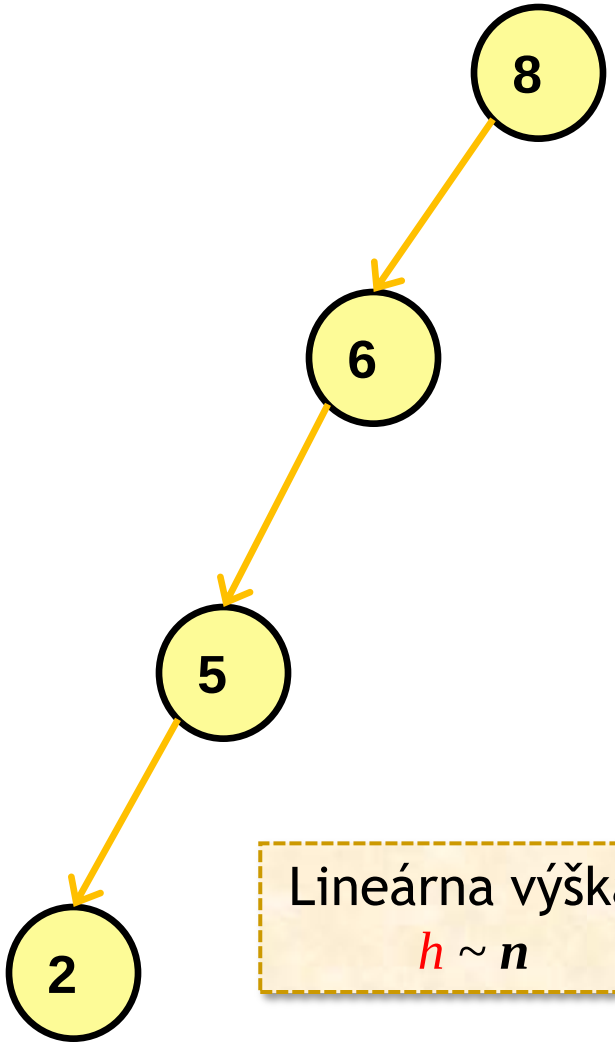
Časová zložitosť operácií

- Pri každej operácii (`contains`, `add`, `remove`) sa schádza od koreňa k jednému z uzlov stromu:
  - v každom uzle čas $O(1)$, navštívených je nanajvýš $h+1$ uzlov, kde ***h*** je **výška stromu**
  - dôsledok: časová zložitosť každej z operácií je $O(h)$, kde h je výška stromu
- Ako závisí výška stromu h od počtu v ňom uložených hodnôt n? Určite $h <= n$.
  - Dôsledok: BVS na implementáciu množiny nemôže byť horšie ako pole, kde každá z týchto operácií potrebuje $O(n)$

BVS s rôznymi výškami



Logaritmická výška:
$h \sim log(n)$



Lineárna výška:
$h \sim n$

Časová zložitosť BVS

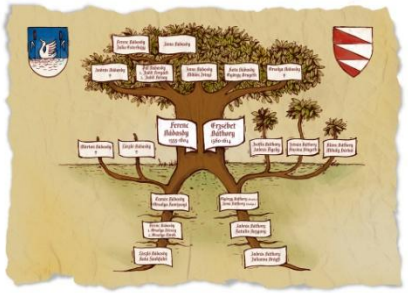
- Fakty o BVS s výškou h:
  - každá operácia v BVS trvá v najhoršom prípade $O(h)$
  - výška stromu závisí od postupnosti realizovaných operácií:
    - `add(1), add(2), add(3), add(4), …, add(n)` vytvorí degenerovaný BVS s výškou n-1
  - pre výšku binárneho stromu s n uzlami platí:
    - $log(n) <= h < n$
- Ako dosiahnuť logaritmickú výšku?

Viac na cvičeniach

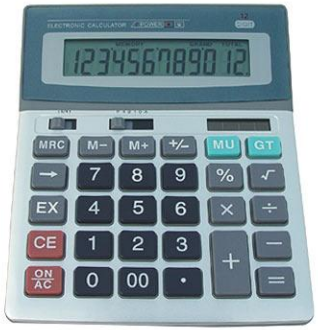
Samovyvažovacie stromy

- BVS je dobrá štruktúra, ak je strom vyvážený
- **Samovyvažovacie** BVS
  - chytré algoritmy zabezpečujúce, že ak sa naruší vyváženosť, tak sa sériou niekoľkých operácií (rotácií) strom opäť vyváži
  - časová zložitosť opravy narušenia vyváženosti je $O(h)$ – t.j. rovnaká ako zložitosť modifikujúcej operácie
  - *AVL stromy, RB-stromy* (červeno-čierne), …
- Trieda `java.util.TreeSet` interne ukladá hodnoty v (samovyvažovacom) RB-strome

Aplikácie stromov



- Strom potomkov
- Uloženie hierarchií
- Aritmetické stromy
- Binárne vyhľadávacie stromy a ich modifikácie/zovšeobecnenia
  - Samovyvažovanie stromy
  - B-stromy (na indexovanie v databázach)



Čo sme sa naučili?

Nie je pravda, že najkrajšie stromy sú na Horehroní!

ak nie sú otázky...

Ďakujem za pozornosť!